“波の強制力其の他に関する覚書”

別 所 正 利

内容目次

1. 序 言

現在波浪中の諸問題は花岡の華麗な理論，丸尾の円熟した考察等によって理論的には略々完成しているにも拘わらず，理論が難解であり，数値計算が複雑であり又其の夫々の項が物理的に親密な諸量にはっきりと結びつけられていない為に，実用上はフルードクリロッフ理論に2次元的計算の諸結果理論的成果を参照してストリップ法を用いている様である。[8)9)]

従って今後の発展の為には此等の理論相互間の関係をはっきり認識すると云うことが重要な問題であると考えられる。

特に花岡の理論はすべて線型的に整備されているので他の理論との比較に当ってはかなりの困難を感ずる。

例えば丸尾によれば振動しつゝ運動する様な物体に働く力 F_i はベルヌーイの定理

$$p = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\rho}{2} q^2 , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.1)$$

に順じて

$$F_i = \rho \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial n} dS - \frac{\rho}{2} \iint_S q^2 \frac{\partial x_i}{\partial n} dS , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.2)$$

但し　$i = 1, 2, 3$ で　$x_1 \equiv x, \; x_2 \equiv y, \; x_3 \equiv z$　とする。

であって，此の右辺第2項はラガリーの公式で与えられ従って基本振動部分を含まない[6)]から F_i の基本振動部分 $\widetilde{F}_i$ は

1964. 8. 18

$$\widetilde{F_i} = \rho \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial x_i}{\partial n} dS \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.3)$$

であると云う。

一方花岡によればφを攪乱のポテンシャルとして

$$p \doteqdot \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho V \frac{\partial \varphi}{\partial x} \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.4)$$

であるから

$$\widetilde{F_i} = \rho \iint_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + V \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{\partial x_i}{\partial n} dS \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.5)$$

であると云う。[1)]

此の形は明らかに（1.3）と異なる。

然し乍ら花岡の境界条件。[1)]

$$\frac{\partial}{\partial n} \overline{\varphi_i} = \left. \frac{\partial \overline{\varphi_i}}{\partial y} \right|_{y=0} = \left(-i\omega + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial x_i}{\partial n} \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.6)$$

但し φ_i は

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \frac{\partial \overline{\varphi_i}}{\partial n} = -\frac{\partial x_i}{\partial n} \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1.7)$$

の様な境界条件を持つ函数とし，上横棒は今後共複素共軛値を意味するものとする。

又，φは $e^{i\omega t}$ に比例するものとする。

（1.6）を使って（1.5）を $y=0$ の面上で部分積分すると，形式的に（1.3）に移行する事が証明出来る。

或いは又，後述の花岡の第2定理（6.6）を用いれば（1.5）右辺第2項は，（1.7）を使って，

$$\iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x_i}{\partial n} dS = -\iint \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial n} dS = -\iint \varphi_i^* \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dS \ , \quad \cdots\cdots \quad (1.8)$$

此処に φ_i^* は後述の φ_i の逆ポテンシャルである。

であるから，此れは2次の項であって線型理論の観点から考えれば当然省略すべき項となる。

此の様にして線型的立場に立って言えば，花岡理論における（1.5），（1.6）両式は（1.3），（1.7）式と等価である事になるが，（1.6）の境界条件よりは（1.7）の方が直観的で理解しやすいし，又2次元問題等の他の分野では（1.3），（1.7）式の記述になっているので便利であろう。

さて，此の覚書の目的は波の強制力等に関するHaskind－花岡の公式の説明であるが，順序と

して速度ポテンシャル，特に２次元の境界値問題等についても考察する。

2. Green 函数

先ずxの正の方向に単位速度の流れがあるものとしzー軸を上方にとり，速度ポテンシャルを，

$$\varphi'(x, y, z, t) = Re[i\omega a e^{i\omega t}\varphi(x, y, z)], \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.1)$$

とおく。但し，tは時間，ωは円周波数，aは振動の振巾とする。

水面$z=0$では，

$$L[\varphi] = 0, \qquad z=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.2)$$

但し，

$$L \equiv \lim_{\mu\to+0}\left[\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x} + \mu\right)^2 + g\frac{\partial}{\partial z}\right], \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.3)$$

gは重力の常数とする。

此の条件を満足し且つ点$Q\equiv(x', y', z')$に$\frac{1}{r}$の様な特異点を持つ函数は，[1)3)]

$$G(P,Q) = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{g}{\pi}\lim_{\mu\to+0}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\kappa e^{\kappa(z+z')+i\kappa(\widetilde{\omega}-\widetilde{\omega}')}\,d\kappa\, d\theta}{(\kappa\cos\theta+\omega-\mu i)^2-g\kappa}, \cdots\cdots\cdots \quad (2.4)$$

但し，$P\equiv(x, y, z)$，$Q\equiv(x', y', z')$，$r_1=\overline{PQ}$，$r_2=\overline{P\overline{Q}}$，$\overline{Q}\equiv(x', y', -z')$

$\widetilde{\omega}=x\cos\theta + y\sin\theta$，$\widetilde{\omega}'=x'\cos\theta + y'\sin\theta$

即ち，

$$L_P\, G(P,Q) = 0, \qquad \text{for} \quad z=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.5)$$

一方

$$L^* \equiv \lim_{\mu\to+0}\left[\left(i\omega + \mu - \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + g\frac{\partial}{\partial z}\right], \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.6)$$

を導入すると，

$$L_Q^*\, G(P,Q) = 0, \qquad \text{for} \quad z'=0, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.7)$$

が容易に判る。

(2.7) の条件は，花岡の reverse flow potential[5)]の水面条件であるから，＊印によってそれを表わす事にすると，

$$G(Q,P) = G^*(P,Q), \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.8)$$

の様に書ける。

即ち一般にグリーン函数は$G(P,Q)=G(Q,P)$なる対称性を持っているが我々の場合は此の (2.8) 式を持っている訳である。

特に一様流れのない場合は，

$$L \equiv L^* = \left[(i\omega + \mu)^2 + g\frac{\partial}{\partial z}\right],\quad G(P,Q)=G(Q,P), \cdots\cdots \quad (2.9)$$

である。

さて，

$$\iint \{ \varphi(Q)\frac{\partial}{\partial n} G(P,Q) - G(P,Q)\frac{\partial \varphi(Q)}{\partial n} \} dS$$

なる面積分を，P点の周り及び物体の表面，水面，無限遠方の円筒面，底面上に積分すると零になる筈である。

此の内Pの周りの積分は $4\pi\varphi(P)$ 底面の積分は零，円筒面の積分はφとGが共に発散波を持つと考えられるので零水面上の積分は，

$$-\iint_{z'=0} \{ \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial z_Q} G(P,Q) - G(P,Q)\frac{\partial \varphi}{\partial z_Q} \} dxdy,$$

であるから（2.2），（2.7）を代入して部分積分し，φが無限遠で高々発散波を持つとすれば矢張零になる。

従って，

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \{ \frac{\partial \varphi}{\partial n} G(P,Q) - \varphi\frac{\partial}{\partial n} G(P,Q) \} dS_Q \ , \quad \cdots\cdots\cdots \quad (2.1\ 0)$$

が得られる。

又，
$$H(\kappa,\theta) = \frac{1}{4\pi} \iint_S (\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}) e^{\kappa z - i\kappa\widetilde{\omega}} dS, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.1\ 1)$$

なる函数を定義すると（2.1），（2.4）を使って，（2.1 0）から，

$$\varphi(\rho) = \frac{1}{4\pi} \iint_S (\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial}{\partial n}) \frac{1}{r_1} dS - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{(\kappa\cos\theta + \omega - \mu i)^2 + g\kappa}{(\kappa\cos\theta + \omega - \mu i)^2 - g\kappa} H(\kappa,\theta) e^{\kappa z + i\kappa\overline{\omega}} d\kappa dS,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.1\ 2)$$

なる表示式も得られる。[1]

3. 波なし分布

φは（2.1 0）以外に又波なし分布と適当な波源の組合せで表わす事も出来る。[10) 13)]

そこで一般の波なし分布について考えて見よう。

さて（2.2）は実虚部共に満足しなければならないから其の夫々については，

$$LL^* \text{ or } L\overline{L} \equiv \{ (i\omega + \frac{\partial}{\partial x})^2 + g\frac{\partial}{\partial z} \} \{ (-i\omega + \frac{\partial}{\partial x})^2 + g\frac{\partial}{\partial z} \}, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.1)$$

なる演算について水面上で零にならなければならない。

尚，此処では波のないものを考えるからμを考える事は必要がないので以下とつた式を扱う。

そこで更に

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{L} &\equiv \left[\left(i\omega + \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - g\frac{\partial}{\partial z} \right], \\ \widetilde{\overline{L}} &\equiv \left[\left(-i\omega + \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - g\frac{\partial}{\partial z} \right],\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.2)$$

なる随伴演算子を導入して，

$$\varphi = \overline{L}\,\widetilde{L}\,\widetilde{\overline{L}}\,f \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.3)$$

な函数 f を考えると

$$L\varphi = L\,\overline{L}\,\widetilde{L}\,\widetilde{\overline{L}}\,f$$

$$= \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^2 \right)^4 - 2g^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} - 6\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \omega^4 \right) + g^4 \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right] f ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.4)$$

であるから逆に f が水面に関して上下反対称でありさえすれば水面条件を満足し，然も波のないポテンシャル φ を（3.3）式によって求める事は容易に出来る。[15]

例えば f として，

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{2\ell} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{m} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right), \\ &\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{2\ell+1} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{m} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.5)$$

とすれば（3.3）の演算によって波のないポテンシャルが求められる。

特に次の場合は至極簡単である。

i）　$\omega = 0$ の場合[15]は，

$$L = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + g\frac{\partial}{\partial z} = \overline{L} \quad , \quad \widetilde{L} = \widetilde{\overline{L}} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - g\frac{\partial}{\partial z} \quad ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.6)$$

$$L\,\widetilde{L} = \frac{\partial^4}{\partial x^4} - g^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad ,$$

特に2次元では $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$　故，

$$L\,\widetilde{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + g^2 \right) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.7)$$

となるから，例えば

$$f_n = \frac{\sin n\theta}{r^n} \quad , \quad \zeta = x + iz = re^{i\theta} , \quad n \geq 1 \quad , \cdots\cdots \quad (3.8)$$

とおくと，

$$\widetilde{L} f_n = g \frac{\partial}{\partial x} \quad Re \left[\frac{1}{\zeta^n} - \frac{in}{g\zeta^{n+1}} \right] ,$$

となるから一度xで積分して

$$\varphi_n (x , z) = Re \left[\frac{1}{\zeta^n} - \frac{in}{g\zeta^{n+1}} \right] ,$$

$$\cdots\cdots \quad (3.9)$$

更には

$$\varphi_0 (x , z) = Re \left[\log \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} \right) + \frac{2i}{g (\zeta^2 - 1)} \right] ,$$

が波なし分布の全体である。

ii） 一様流れがなければ[13)]

$$L = \overline{L} = -\omega^2 + g \frac{\partial}{\partial z} \quad , \quad \widetilde{L} = \overline{\widetilde{L}} = -\omega^2 - g \frac{\partial}{\partial z} ,$$

$$L \widetilde{L} = \left(\omega^4 - g^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (3.1\ 0)$$

であるから，２次元では$\zeta = x + iz$とおいて，上と同様にして，

$$\varphi_n = Im \left\{ \frac{1}{\zeta^n} - \frac{in}{K\zeta^{n+1}} \right\} , \quad K = \frac{\omega^2}{g} = \frac{2\pi}{\lambda} , \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3.1\ 1)$$

（3.9），（3.1 1）の$n = 1$の場合の流線を第１図に夫々実線点線で示す。鎖線は（3.9）で φ_0も含めた場合であるが此の場合は（3.9）から判る様に水面に特異点があるので波はないとしてもモーメンタム・ロスを伴う様な事になる。

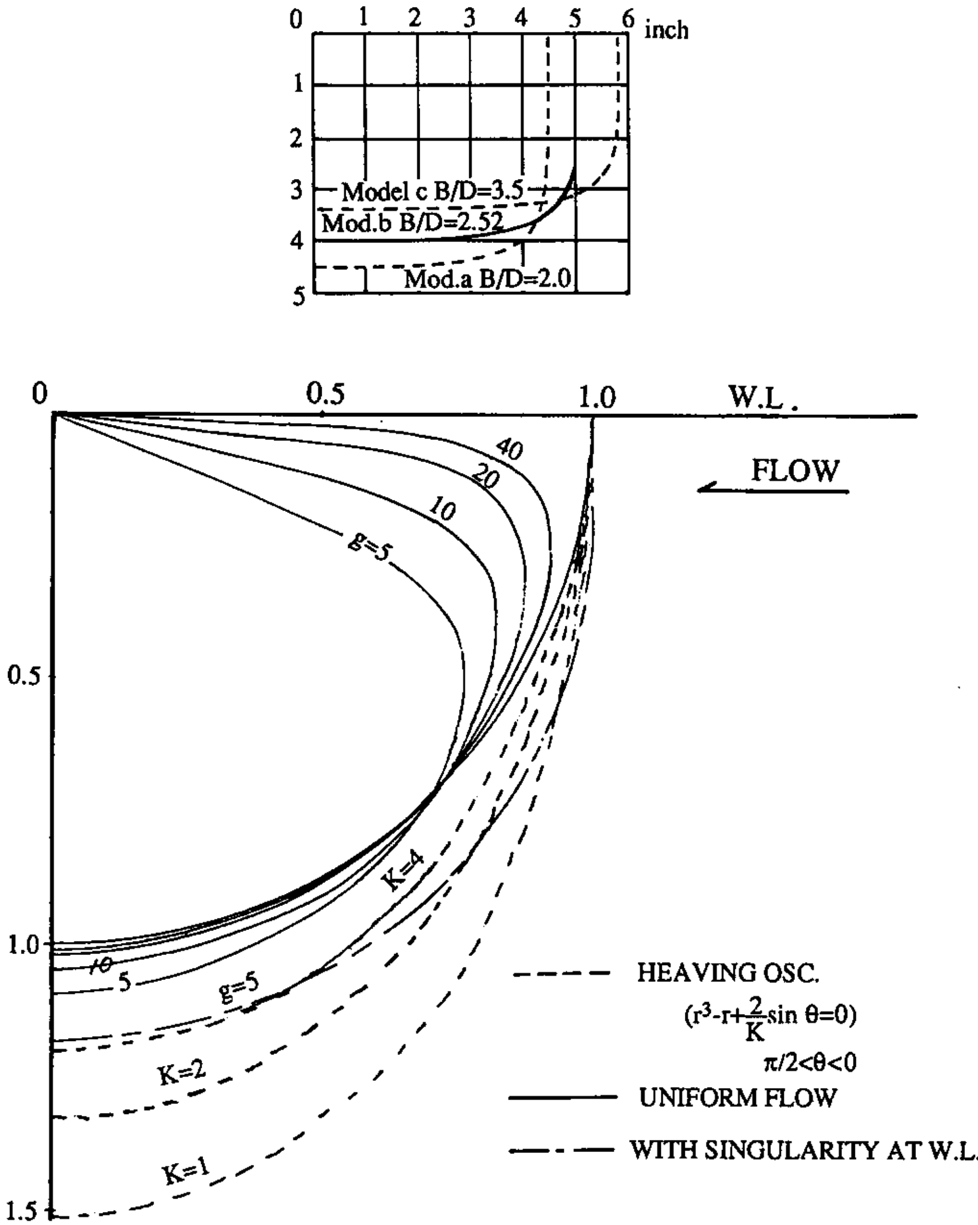
さて此の様に上下動の場合はKが大きいと極めて円筒に近い。[17)]

其の他の場合には簡単には求められないが φ_nをnケ考えてnケの点について流れ函数を与えれば大抵の場合解が得られる筈である。

特にKが大きいと $\varphi_n \rightarrow \dfrac{\sin n\theta}{r^n}$ で上下反対称のポテンシャルであるから此の時ローリング問題は鏡像を考えた物体の回転運動のポテンシャルで近似出来る。

一方，此の問題で$K \rightarrow 0$では（3.1 1）から判る様に $\varphi_n \rightarrow \cos n\theta / r^n$ で上下対称なポテンシャルで近似出来る。[1) 2)]

又，此の極限でUrsellは波の振巾が消える様な断面（第１図上図）を発見し，[13)] 此れは実験的にもある程度確認された。[14)]



第 1 図

此の様な波なし分布（準波なしと呼ぶ）を系統的に見出すのは簡単ではなさそうだが，とにかくいくらもありそうで，しかもその中には割合簡単な形のものも含まれていそうである。

逆に云えば，横揺れ等では波が大きい方が良いのであるから，やはり形状に注意しないといけないと云う事である。

4. 一様流れのない場合（２次元）

簡単の為に２次元で考えるが此の節の結論を３次元に拡張するのには殆ど問題がない。

今，垂直軸として y を上向きにすると§２のグリーン函数は

$$G(P,Q)=\log\left(\frac{r_1}{r_2}\right)-2\lim_{\mu\to 0}\int_0^\infty e^{\kappa(y+y')}\ \frac{\cos\kappa(x-x')}{\kappa-K-\mu_i}\,d\kappa\ ,\cdots\cdots \quad (4.1)^{17)}$$

但し，$P\equiv(x,y)$，$Q\equiv(x',y')$，$r_1=\overline{PQ}$，$r_2=\overline{P\bar{Q}}$，$\bar{Q}\equiv(x',-y')$，

$K=\omega^2/g=2\pi/\lambda$，$\lambda$ は波長等である。

よって

$$\varphi(P)=\frac{1}{2\pi}\int_c\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial n}G(P,Q)-\varphi\frac{\partial}{\partial n}G(P,Q)\right\}ds_Q\ ,\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.2)^{17)}$$

x が充分大きいと，

$$G(P,Q)\xrightarrow[|x|\gg 1]{}-2\pi i\,e^{K(y+y')+iK|x-x'|}\ ,\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.3)^{17)}$$

であるから

$$\begin{aligned}\varphi(x,y)&\xrightarrow[x\gg 1]{}-2\pi i\,e^{Ky+iKx}\ \overset{+}{H}(K)\ ,\\ &\xrightarrow[x\ll -1]{}-2\pi i\,e^{Ky-iKx}\ \overset{-}{H}(K)\ ,\end{aligned}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.4)^{17)}$$

但し，

$$\overset{\pm}{H}(K)=\frac{1}{2\pi}\int_c\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial}{\partial n}\right)e^{Ky\mp iKx}\,ds\ ,\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.5)$$

一方では φ は波源と波なし分布の和で表わされる[13)]から，例えば

$$\varphi(x,y)=AG(x,y;0,0)+B\frac{\partial}{\partial x'}G(x,y;0,0)+\sum_{n=1}^{\infty}A_nf_n(x,y)\ ,\cdots\cdots \quad (4.6)$$

此処に f_n は（3.1 1）で与えられるものとする。

従って（4.3），（4.4），（4.6）から，

$$\overset{+}{H}(K)=A-iB\ ,\quad \overset{-}{H}(K)=A+iB\ ,\quad\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.7)$$

次に境界条件を考えよう。

i）　左右ゆれ

ポテンシャル φ_1'，振巾 a_1，$\varphi_1'=i\omega a_1e^{i\omega t}\ \varphi_1$ ，

C 上で　$\dfrac{\partial\varphi_1'}{\partial n}=-i\omega a_1e^{i\omega t}\dfrac{\partial x}{\partial n}$

よって，

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = -\frac{\partial x}{\partial n} \equiv -\frac{\partial x_1}{\partial n}, \quad \phi_1 = -y \;, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.8)$$

ⅱ）　上下ゆれ

ポテンシャル φ_2' ，振巾 a_2 ，$\varphi_2' = i\omega a_2 e^{i\omega t}\varphi_2$ ，

よって，

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = -\frac{\partial y}{\partial n} \equiv -\frac{\partial x_2}{\partial n}, \\ &\phi_2 = x \equiv x_1 \;, \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.9)$$

ⅲ）　横ゆれ

ポテンシャル φ_3' ，振巾 a_3 ，$\varphi_3' = i\omega a_3 e^{i\omega t}\varphi_3$ ，

$$\frac{\partial \varphi_3}{\partial n} = -\left(x\frac{\partial y}{\partial n} - y\frac{\partial x}{\partial n}\right), \; \phi_3 = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2), \; \cdots \quad (4.10)$$

ⅳ）　波の反射

$$\left.\begin{aligned} &\text{入射波} \quad \varphi_0' = \frac{g a_0}{\omega i} e^{Ky+iKx+i\omega t} \\ &\qquad\quad\;\; \varphi_0 = e^{Ky+iKx} \;, \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.11)$$

$$\text{反射波} \quad \varphi_4' = \frac{g a_0}{\omega i} e^{i\omega t}\varphi_4$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi_4}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial n}\left(e^{Ky+iKx}\right) \;, \\ &\phi_4 = -\phi_0 = i\, e^{Ky+iKx} \;, \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.12)$$

此処で φ_i の共軛函数，即ち流れ函数を ϕ_i とした。

さて此等の境界条件は φ_i がすべて複素数であるから夫々実虚部の２つの条件を表わしている訳であり，上の様に定義すると虚部はすべて零という斉次の境界条件になる訳である。

（4.6）から

$$\phi_1 = A_i \widetilde{G} + B_i \widetilde{G}_{x'} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(i)} \widetilde{f}_n \;, \; i = 1 \sim 4 \;, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.13)$$

但し右辺の～印は流れ函数を意味するものとしよう。

今，

$$A_i = \alpha_i e^{i\varepsilon_i}, \; B_i = \beta_i e^{i\delta_i} \;, \; A_n^{(i)} = \alpha_n^{(i)} + i\beta_n^{(i)}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.14)$$

$$\widetilde{G} = \widetilde{G}_c + i\widetilde{G}_s \;, \quad \widetilde{G}_{x'} = \widetilde{G}_c' + i\widetilde{G}_s' \;, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4.15)$$

と実虚部を分離すると（4.1）から先ず，

$$
\left.\begin{aligned}
-G_s &= -2\pi e^{Ky}\cos Kx\ ,\quad G_s = -2\pi e^{Ky}\sin Kx,\\
G_s &= -2\pi K e^{Ky}\sin Kx,\quad G_s = 2\pi K e^{Ky}\cos Kx\ ,
\end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\quad (4.1\,6)
$$

更に簡単の為に物体が左右対称であるとすると φ_1，φ_3 は x に関し反対称で $A_i=0$，$A_{2n+1}^{(i)}=0$，φ_2 は x に関し対称で $B_i=0$，$A_{2n}^{(i)}=0$ となる。

（4.8）から（4.1 2）迄の境界条件を Φ_i に関して書いて見ると，

$i=1,\ 3$）

$$
\left.\begin{aligned}
&\beta_i\cos\delta_i\,\widetilde{G}_c'-\beta_i\sin\delta_i\,\widetilde{G}_s'+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}^{(i)}\,\widetilde{f}_{2n}=\begin{cases}-y,\ \text{for}\ i=1,\\ -\dfrac{x^2+y^2}{2},\ \text{for}\ i=3,\end{cases}\\
&\beta_i\cos\delta_i\,\widetilde{G}_s'+\beta_i\sin\delta_i\,\widetilde{G}_c'+\sum_{n=1}^{\infty}\beta_{2n}^{(i)}\,\widetilde{f}_{2n}=0\ ,
\end{aligned}\right\}(4.1\,7)
$$

$i=2$）

$$
\left.\begin{aligned}
&\alpha_2\cos\varepsilon_2\,\widetilde{G}_c-\alpha_2\sin\varepsilon_2\,\widetilde{G}_s+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n+1}^{(2)}\,\widetilde{f}_{2n+1}=x\ ,\\
&\alpha_2\cos\varepsilon_2\,\widetilde{G}_s+\alpha_2\sin\varepsilon_2\,\widetilde{G}_c+\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{2n+1}^{(2)}\,\widetilde{f}_{2n+1}=0\ ,
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (4.1\,8)
$$

$i=4$）

此の場合は対称性から４組の方程式群が得られる。

$$
\left.\begin{aligned}
&\alpha_4\cos\varepsilon_4\,\widetilde{G}_c-\alpha_4\sin\varepsilon_4\,\widetilde{G}_s+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n+1}^{(4)}\widetilde{f}_{2n+1}=e^{-Ky}\sin Kx,\\
&\alpha_4\cos\varepsilon_4\,\widetilde{G}_s+\alpha_4\sin\varepsilon_4\,\widetilde{G}_c+\sum_{n=0}^{\infty}\beta_{2n+1}^{(4)}\widetilde{f}_{2n+1}=0\ ,
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\quad (4.1\,9)
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\beta_4\cos\delta_4\,\widetilde{G}_c'-\beta_4\sin\delta_4\,\widetilde{G}_s'+\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}^{(4)}\ \widetilde{f}_{2n}=0\ ,\\
&\beta_4\cos\delta_4\,\widetilde{G}_s'+\beta_4\sin\delta_4\,\widetilde{G}_c'+\sum_{n=1}^{\infty}\beta_{2n}^{(4)}\ \widetilde{f}_{2n}=e^{Ky}\cos Kx,
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\quad (4.2\,0)
$$

此等の聯立方程式の内右辺が０になる式について考えると G，f_n 等が互に一次独立とするすべての係数が零となって意味のない解しか得られない事になるから，解が得られるとするならば，此等の函数の間に一つの関係が存在する事を意味する。

即ち（4.1 7）第２式は $i=1$，３に対し同じ式であると考えられるので，

$$
\frac{\beta_1\ \cos\delta_1}{\beta_3\ \cos\delta_3}=\frac{\beta_1\ \sin\delta_1}{\beta_3\ \sin\delta_3}=\frac{\beta_{2n}^{(1)}}{\beta_{2n}^{(3)}}\ ,\quad \text{よって}\quad \delta_1=\delta_3\ ,\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad (4.2\,1)
$$

次に（4.1 7）第2式と（4.2 0）第2式，（4.1 8）第2式と（4.1 9）第2式は（4.1 6）を考えると，やはり夫々同じ式と考えられるから

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\alpha_4\ \cos\varepsilon_4}{\alpha_2\ \cos\varepsilon_2}=\frac{\alpha_4\ \sin\varepsilon_4}{\alpha_2\ \sin\varepsilon_2}=\frac{\beta^{(4)}_{2n+1}}{\beta^{(2)}_{2n+1}},\quad \varepsilon_2=\varepsilon_4\\&\frac{\beta_4\ \cos\delta_4-\dfrac{1}{2\pi K}}{\beta_1\ \cos\delta_1}=\frac{\beta_1\ \sin\delta_4}{\beta_1\ \sin\delta_1}=\frac{\beta^{(4)}_{2n}}{\beta^{(1)}_{2n}}\ ,\end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (4.2\,2)$$

更に（4.1 9），（4.2 0）の夫々第1式と第2式も（4.1 6）を考えれば夫々に同じ方程式と考えられるので，解く必要もなく，

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\alpha_4\ \cos\varepsilon_4}{\alpha_4\ \sin\varepsilon_4}=\frac{-\alpha_4\ \sin\varepsilon_4-\dfrac{1}{2\pi}}{\alpha_4\ \cos\varepsilon_4}=\frac{\alpha^{(4)}_{2n+1}}{\beta^{(4)}_{2n+1}}\ ,\\&\frac{\beta_4\ \cos\delta_4}{\beta_4\ \sin\delta_4}=\frac{-\beta_4\ \sin\delta_4}{\beta_4\ \cos\delta_4-\dfrac{1}{2\pi K}}=\frac{\alpha^{(4)}_{2n}}{\beta^{(4)}_{2n}}\ ,\end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (4.2\,3)$$

此等の式から，先ず φ_1，φ_2 の諸係数が判れば φ_3 については，波の振巾だけ判ればその虚部については（4.2 1）で各係数が決まってしまい，φ_4 については（4.2 2）でその虚部については各係数の比が求まり，且つ（4.2 3）で波の振巾迄求まってしまう。

即ち，計算すれば，

$$\left.\begin{aligned}&A_4=\alpha_4e^{i\varepsilon_4}=-\frac{\sin\varepsilon_2}{2\pi}e^{i\varepsilon_2}\ ,\\&B_4=\beta_4e^{i\delta_4}=-\frac{i\sin\delta_1}{2\pi K}e^{i\delta_1}\ ,\end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ (4.2\,4)$$

結局の所，今の場合は $i=1$，2について各2組，$i=3$については実部のみ1組，合計5組の聯立方程式を解けば，それで充分である事になる。此れを3次元で考えると波源の置き方等の点でうまく成功しない。

5. 物体に働く力（2次元一様流れなし）

さて周期的な力は（1.3）の形で与えられるから，無次元的に考えて，j なる方向の φ_i による力を，

$$\left.\begin{aligned}&F_{i,j}=\int_c\varphi_i\frac{\partial x_j}{\partial n}ds=-\int_c\varphi_i\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}ds\ ,\\&\text{モーメントは}\ F_{i,3}=\int_c\varphi_i\left(x\frac{\partial y}{\partial n}-y\frac{\partial x}{\partial n}\right)ds=-\int_c\varphi_i\frac{\partial\varphi_3}{\partial n}ds\ ,\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\ (5.1)$$

と定義しておこう。（（4.8），（4.9），（4.1 0）の境界条件を使ってある。）

特に波の強制力は，

$$E_i = +\int_c (\varphi_0+\varphi_4)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial x_i}{\partial n}\\ x\dfrac{\partial y}{\partial n}-y\dfrac{\partial x}{\partial n}\end{array}\right\} ds = -\int_c (\varphi_0+\varphi_4)\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} ds, \quad \cdots\cdots \quad (5.2)$$

と書ける。

今，
$$\int \left(\varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} - \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \right) ds \ , \quad i=1\sim 4$$

なる積分を物体表面 c と水表面 F と無限遠の下半円上にとると，F 上では水面条件で消え，下半円上でも φ_i，φ_j が共に外側に出て行く波と考えられるのでやはり消える。[4)]

よって，

$$\int_c \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} ds = \int_c \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} ds \ , \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.3)$$

（5.1）で考えれば，

$$F_{ij} = F_{ji} \ , \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.4)$$

此等の関係は計算で確かめられている様である。[11) 12)]

次に（5.2）式について考えるに $\varphi_0 + \varphi_4$ の境界値は（4.1 2）であるから，更に（4.4）を使って，

$$E_i = \int_c \left\{ \varphi_i \frac{\partial}{\partial n}(\varphi_0+\varphi_4) - (\varphi_0+\varphi_4)\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right\} ds$$

$$= -2\pi \bar{H_i}(K) + \int_c \left\{ \varphi_i \frac{\partial \varphi_4}{\partial \nu} - \varphi_4 \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} \right\} ds \ ,$$

即ち（5.3）によって，

$$E_i = -2\pi \bar{H_i}(K) = -2\pi (A_i + i B_i)$$

$$= \int_c \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial n} - \varphi_i \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{Ky+iKx} ds \ , \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.5)$$

此れ等がHaskind の関係である。[4)]

此の式は E_i が運動 i による波の入射波と同じ方向に進むものの振巾に比例する事を示している。

又，最右辺第1項はフルード・クリロッフの力を示しており，第2項は，それを運動 i によるダブレットだけ補正すればよい事を示している。

さて次に，

$$\int \left(\varphi_i \frac{\partial \overline{\varphi_j}}{\partial n} - \overline{\varphi_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} \right) ds \ ,$$

なる積分を考えよう。[4) 16)]

今度は φ_i は波が外に出るのに対し，$\overline{\varphi_j}$ は波が内側に向いている，いわば吸収ポテンシャルであるから，無限大半円上の積分は有限になる。[4)]

（4.4）を代入して計算すると，

$$\int_c \left(\varphi_i \frac{\partial \overline{\varphi_j}}{\partial n} - \overline{\varphi_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) ds = 2\pi^2 i \left[H_i^+ \overline{H_j^+} + \overline{H_i^+} H_j^+ + H_i^- \overline{H_j^-} + \overline{H_i^-} H_j^- \right], \ \cdots\cdots \quad (5.6)$$

此れは明らかに虚数値である。

又，$j=1$，2，3では

$$\frac{\partial \overline{\varphi_j}}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial n}$$

であるから，

$$F_{ij} = - \int_c \varphi_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} ds = - \int_c \overline{\varphi_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} ds + 2\pi^2 i \left[\Sigma H_i H_j \right],$$

即ち，

$$Im\{F_{ij}\} = 2\pi^2 Re\left[H_i^+ \overline{H_j^+} + H_i^- \overline{H_j^-} \right] = 4\pi^2 Re\left(A_i \overline{A_j} + B_i \overline{B_j} \right), \ \cdots\cdots \quad (5.7)$$

特に $i=j$ ならば，

$$Im\{F_{ij}\} = 4\pi^2 \left[A_i \overline{A_i} + B_i \overline{B_i} \right], \ \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.8)$$

である。[4) 16)]

此れはよく知られたダムピングが生成波高の自乗に比例する力であると云う式であって，（5.5）と較べれば判る様に此れは（5.5）の絶対値の自乗になっている。[4)]

即ち，

$$Im\{F_{ii}\} = E_i \overline{E_i} \ , \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (5.9)$$

此れは3次元では勿論一般には成立ないが，$E_i \overline{E_i}$ を各方向に積分したものがダムピングに等しくなる事になる。[4)]

此の式から種々の面白い実験が考えられるであろう。

尚，此処でダムピングと強制力が結びついているから，例えばダムピングは大きいが波からの力は少いと云う様なうまい具合にはゆかない事になる。

又，ダムピングの極大な船と云う様な問題も考えられるが，此の為には例えば（4.5）式の絶対値の自乗の変分をとれば積分方程式が得られるけれども此の方程式の核 e^{Ky+iKx} は正則であるので極値は存在しない。換言すればダムピングはいくらでも大きく出来る事になる。

さて最後に従来，力は（5.1）等でc上で積分して求めている。[10)11)12)]

此れは等角写像が簡単に判る場合は便利であるが，形が図式的に与えられる様な場合はむしろ（4.1 6）以下の聯立方程式を直接といた方が便利であろう。

その様な時には，$j=1$，2については，

$$F_{ij}=\int_c \varphi_i \frac{\partial x_j}{\partial n}\,ds=\int_c x_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\,ds+\int_{c'}\left(\varphi_i\frac{\partial x_j}{\partial n}-x_j\frac{\partial \varphi_i}{\partial n}\right)ds \quad ,\cdots \qquad (5.1\ 0)$$

とおいてc'を適当な曲線にとれば簡単な計算（級数）に還元出来る。$j=3$には此れはうまくない。

6. 一様流れのある場合（3次元）

此の場合も§4，5と同様な考察をすれば面白い結果が出そうであるが，此れは大変面倒なことなので，（5.3），（5.5），（5.6）の拡張についてだけ考える。

矢張，運動iによるポテンシャルをφ_iとし，$\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial \nu}$が実数となる様に選んでおく。

$i=1\sim6$，として，7は波の反射，0は入射波を意味するものとする。

先ず花岡[5)]に従ってφの逆ポテンシャルφ^*を（2.6）を満足し，且つ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n}=\frac{\partial \varphi^*}{\partial n}=\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial n}=\frac{\partial \overline{\varphi^*}}{\partial n}\quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (6.1)$$

の様に定義する。

グリーン函数は（2.4）と同様にして，

$$G^*(x,y,z;x',y',z')=\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\frac{g}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\kappa e^{\kappa(z+z')+i\kappa(\widetilde{\omega}-\widetilde{\omega'})}\,d\kappa\,d\theta}{(-\kappa\cos\theta+\omega-\mu i)^2-g\kappa}$$

$$=\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\frac{g}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\kappa e^{\kappa(z+z')-i\kappa(\widetilde{\omega}-\widetilde{\omega}')}\,d\kappa\,d\theta}{(\kappa\cos\theta+\omega-\mu i)^2-g\kappa}\quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (6.2)$$

となるから（2.4）と較べて，

$$G^*(x,y,z;x',y',z')=G(-x,-y,z;-x',-y',z')$$

$$=G(-x,y,z;-x',y',z')\quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (6.3)$$

である。

此れから（2.9）と同様にして，

$$\varphi^*(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left\{\frac{\partial \varphi^*}{\partial \nu}-\varphi^*\frac{\partial}{\partial \nu}\right\}G^*(x,y,z;x',y',z')\,dS\ ,$$

$$=\frac{1}{4\pi}\iint_S\left\{\frac{\partial \varphi^*}{\partial \nu}-\varphi^*\frac{\partial}{\partial \nu}\right\}G(-x,y,z;-x',y',z')\,dS\ ,\cdots\cdots \qquad (6.4)$$

が得られる。

此の様に φ^* は φ と丁度反対側に波を持っており，且つ（6.1）の条件をも満たすから，最初の定義から考えて，全く一様流れの方向を逆にしただけの違いであると考えられる。

従って，境界値が前後対称（今左右は対称として考えない。）と非対称な部分に別けられるとすると，

即ち，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)_s+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)_a$$

φ も φ^* も夫々別けられて，

$$\varphi=\varphi_s+\varphi_a \quad , \quad \varphi^*=\varphi_s^*+\varphi_a^*$$

即ち，

$$\frac{\partial\varphi_s}{\partial\nu}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)_s \quad , \quad \frac{\partial\varphi_a}{\partial\nu}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right)_a$$

そうすると上の考察から，[5)]

$$\varphi_s^*(x,y,z)=\varphi_s(-x,y,z),\quad \varphi_a^*(x,y,z)=-\varphi_a(-x,y,z),\ \cdots \qquad (6.5)$$

従って，今

$$\iint_{S+F+R}\left(\varphi_i\frac{\partial\varphi_j^*}{\partial n}-\varphi_j^*\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\right)dS \ ,$$

なる積分を考えると前同様 F，R 上の積分は消えて，花岡の第2定理がなり立つ。[5)]

即ち，

$$\iint_S\left(\varphi_i\frac{\partial\varphi_j^*}{\partial n}-\varphi_j^*\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\right)dS=0,\ j,i\neq 0\ ,\ \cdots \qquad (6.6)$$

前同様周期力として，

$$F_{ij}=-\iint_S\varphi_i\frac{\partial\varphi_j}{\partial n}\,dS\ ,\quad i,j=1\sim 6\ ,\ \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (6.7)$$

とおくと（6.1）を使って（6.6）から

$$F_{ij}=-\iint_S\varphi_j^*\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\,dS\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (6.8)$$

従って境界条件の対称性に従って（6.5）から

$$F_{ij}=\pm F_{ji}\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (6.9)$$

が成立つ[5)] が一般には，

$$F_{ij} - F_{ji} = \iint_S (\varphi_j - \varphi_j^*) \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS , \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6.1\ 0)$$

である。

然し乍ら（6.5）の関係があるから，元々境界値問題を解く時に対称部分と非対称部分に別けて解いておけば宜しい。

次の波の強制力については，

$$\varphi_0 = e^{\kappa_0 z - i\kappa_0(x\cos\chi + y\sin\chi)}$$

$$\omega = \kappa_0(c - \cos\chi), \quad \kappa_0 = g/c^2 , \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6.1\ 1)$$

としておけば前と同じ様に，

$$E_i = -\iint_S (\varphi_0 + \varphi_7) \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} dS = \iint_S (\varphi_i^* \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} - \varphi_0 \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial n}) dS ,$$

$$+ \iint_S (\frac{\partial \varphi_7}{\partial n} \varphi_i^* - \varphi_7 \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial n}) dS ,$$

で上の定理から此の第２項は消え，従って，

$$E_i = \iint_S (\varphi_i^* \frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_i^*}{\partial n}) e^{\kappa_0 z - i\kappa_0(x\cos\chi + y\sin\chi)} dS , \cdots \quad (6.1\ 2)$$

所で（6.2），（6.4）から φ^* を（2.1 2）の様にかくと，

$$\varphi^*(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_S (\frac{\partial \varphi^*}{\partial n} - \varphi^*) \frac{\partial}{\partial n} (\frac{1}{r_1}) dS$$

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(\kappa\cos\theta + \omega - \mu i)^2 + g\kappa}{(\kappa\cos\theta + \omega - \mu i)^2 - g\kappa} H^*(\kappa, \theta) e^{\kappa z - i\kappa\varpi} d\kappa d\theta ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6.1\ 3)$$

ここに，

$$H^*(\kappa, \theta) = \frac{1}{4\pi} \iint_S (\frac{\partial \varphi^*}{\partial n} - \varphi^* \frac{\partial}{\partial n}) e^{\kappa z + i\kappa\varpi} dS , \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6.1\ 4)$$

であるから（6.1 2）は，

$$E_i = -4\pi H_i^* \{ \kappa_0(\chi), \chi \} , \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6.1\ 5)$$

の様にも書ける。

此れがHaskindの定理の拡張である。

花岡は（6.1 2）の右辺を彼の境界値を使って変形し，且つ $\varphi_i = \pm \varphi_i^*$ の様な場合のみ考えて，

$$E_i^{(H)} = \iint_S p_i \frac{\partial}{\partial n} e^{\kappa_0 z - i \kappa_0 \varpi(\chi)} \, dS \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6.1\ 6)$$

を導いた。[5)]

此処に p_i は運動 i による圧力である。

此の式を流れのない場合に適用して（5.5）と比較すると，フルード・クリロッフの力がぬけているから，此の式はその様に理解すべきなのであろう。

さて次に（5.6）拡張を考えよう。

$$\iint_{S+F+R} \left(\varphi_i \frac{\partial \overline{\varphi_j}}{\partial n} - \overline{\varphi_i} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) dS \ ,$$

を考えると，此の場合も F 上の積分は消えるが R 上の積分は残る。今これを Q

$$\iint_S \left(\varphi_i \frac{\partial \overline{\varphi_j}}{\partial n} - \overline{\varphi_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} \right) dS = Q_{ij} = \iint_R \left(\varphi_i \frac{\partial \overline{\varphi_j}}{\partial r} - \overline{\varphi_j} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} \right) r d\varphi dz ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6.1\ 7)$$

として計算出来る。

即ち無限遠方の波さえ判れば計算出来る訳であるが面倒なので今の此の儘にしておく。

然し例えば $i = j$ とおくと，此れは明らかに散乱波の失うエネルギーであるから，前と全く相似な関係を持つ事になる。

7. 結　言

以上，Haskind －花岡の波の強制力等に関する公式の説明を終えたい。

此等の公式は，今後の理論的，実験的研究の上で，重要な役割を演ずるであろう事は充分予想出来る。

然し一方では又此等の公式をよく理解する為には，もう一度境界値問題を考えて見る必要がある様である。

此の様な過程を経て，始めてストリップ法との比較も可能になり，又波浪中の諸問題，例えば運動，抵抗増加等の極値問題（此れは２次元で考えた様に確かに関連のある問題である），等にとりかかる事が出来るのではあるまいか。

以　上

参考文献

1）　造船協会６０周年記念双書　第２巻
2)　　〃　　　〃　　　第６巻
3）　　〃　　　〃　　　第８巻
4）　J. N. Newman; J. S. R. SNAME, vol. 6 No. 3 （1962）
5）　花岡達郎；第９回応力連合講演会　（1959）
6）　丸尾　孟；　　〃　　（1959）
7）　G, Vossers; I. S. P. vol. 7　（1960）
8）　福田淳一他；造協論文集110号　（1961）
9）　　〃　　〃　111号　（1962）
10）田才福造　；　〃　105号　（1959）
11）　〃　　〃　110号　（1961）
12）田村欣也　；三菱研究報告
13）F. Ursell; Q. J. M. A. M. vol. 2 （1949）
14）W. C. McLeod & T. Hsieh; Schiffstechnik Bd 10 （1963）
15）別所正利；防大欧文紀要　2巻2号　（1962）
16）　〃　；造協論文集　103号　（1958）
17）F. Ursell; Q. J. M. A. M. vol. 7 （1954）