浮遊式消波装置の Feasibility Study

別 所 正 利

内容目次

1. はじめに

水の波を消す原理として考えられるものは,

A) 波のエネルギーを他のエネルギーに転換して波を小さくする。

B) 波を反射，散乱させて所望の場所に不必要な波が出来ないようにする。

の2つであろう。

Aの代表的なものは，ビーチ式消波装置であってこの場合は反射波を小さくすると言う意味の波消しである。又，波のエネルギーは渦にそして最後に熱エネルギーに転換される。

この場合，波のエネルギーは水の中に戻されているが，これはしかし系外に引き出して仕事をさせてもよい筈である。

これは波力利用（発電等）のアイデアであるが，このように考えてみると，これは逆に見れば波消し装置と見なす事も出来る事になり，もし波のエネルギーをすべて利用出来たとするともはやそこから出て行く波はなくなるからそれは完全な消波装置にもなっているわけであって，波消し装置の研究は一方では波力利用の研究でもある。

実際，J. H. Milgramは水槽端にフラップ式造波機をおき，それを制御して逆に波を消す事に成功し，又T. Y. Wuは水中翼が振動する時波のエネルギーを吸収しうる条件を理論的に求めた。

Bの代表的なものは防波堤であろう。波のエネルギーは殆どそのまゝ反射される。この方式の場合の問題点は波の反射による反力が大洋波を考える場合非常に大きい点である。

この原理に基づく消波装置は現在の所これ以外あまり例がないように思われるが，可能性の大きい分野のように見える。

こゝではこれ以上とりあげない事とし，もっぱら浮遊式のものをAの原理の面から考える事にしよう。

この方式はアイデアとしてはBの原理から発生したと考えられるけれど，波が透過せず又反射波もなくなるとすれば，それは理想的な波消し装置となるであろう。

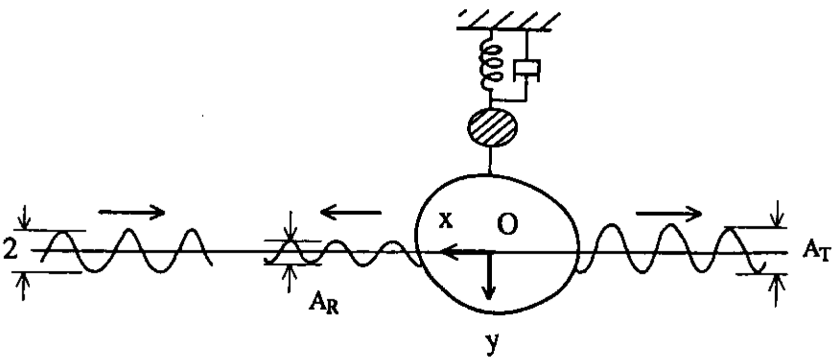
日本造船学会試験水槽委員会 1973. 2. 1

もし上述のような機能が発揮出来るとすれば，それはもはや波消しというよりは波吸収装置と言う方が適当であろう。

以下，簡単の為に２次元問題とし単一波長の正弦波についてのみ考察する事にする。

2. 理 論

下図のように波高が２の入射波の中で物体が原点を中心として振幅 X，Y，θ の単弦運動をしているとしよう。



反射波の振幅を A_R，透過波のを A_T とすると A（２０）式より，

$$A_T + A_R = \frac{\overset{+}{H}_2(K)}{\overline{\overset{+}{H}_2}(K)} + 2iKY\overset{+}{H}_2(K) \quad ,$$

$$A_T - A_R = \frac{\overset{+}{H}_1}{\overline{\overset{+}{H}_1}} + 2iK\{X\overset{+}{H}_1(K) + \theta\overset{+}{H}_3(K)\} \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.1)$$

一方振巾は運動方程式から（物体は左右対称とする。），

$$KY = \overset{+}{H}_2(K)/C'_2 \quad ,$$

$$KX = D_1/\triangle \quad , \quad K\theta = D_3/\triangle \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2.2)$$

で与えられるものである。

しかし，

$$KY = \frac{i}{2\overline{H_2^+}} \quad \text{or} \;, \quad C_2' = -2i \mid H_2^+ \mid^2 \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.3)$$

とする事が出来れば

$$A_T + A_R = 0 \;, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.4)$$

となる。

（2.3）のようにするには図のような力学系を系外に作り，

$$\nabla + f_{22c} + \delta_2 = (B + S_2)/K \;,$$

$$\mu_2 = 1 \;, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.5)$$

（附録参照）

とすればよい。

この時，X，θは自由に動いているとすると，

$$A_R - A_T = \frac{H_1^+}{\overline{H_1^+}} \frac{\triangle}{\overline{\triangle}} \;, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.6)$$

となっている。

（2.5）において $\mu_2 = 1$ であるから系外に物体がなす仕事率は，heaving によるdamping に等しい事になりそれはこの場合，

$$W = \frac{1}{2} N_2 |\dot{Y}|^2 = \frac{\rho}{2}\omega^2 |Y|^2 |H_2^+|^2 = \frac{\rho g^2}{8\omega} = \frac{E_W}{2} \;,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.7)$$

但し，$E_W = \dfrac{\rho g}{4} V_W = \dfrac{\rho g^2}{4\omega}$ ，　$V_W = g/\omega$ ，

で E_Wは単位振巾の入射波の運ぶ単位時間当りのエネルギーである。

つまり入射波の半分のエネルギーは系外に吸収された事になるから，残っているのは半分で波高は（2.4）から $A_R = -A_T$ である故，

$$|A_T| = |A_R| = 1/2 \;, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2.8)$$

とならなければならないが実際（2.6）からそうなっている事がわかる。

rollingを考える必要がなければswayingについても全く同様であって，後の半分のエネルギーを回収出来る事になる。

一般には附録のようにして　$Re\{C_1' C_3' - (C_{13}')^2\} = 0$ ，$\beta_1 = 1$ ，　……… （2.9）

の時　　$A_R = A_T$ ，　…………… （2.10）

となるからYが（2.3）も満たすならば，　$A_R = A_T = 0$ ，　…………… （2.11）

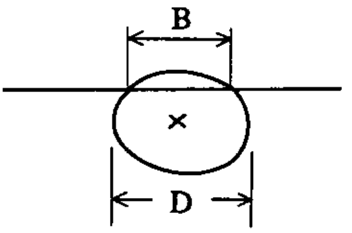
となって所望の条件が得られる。

なお，$A_R=0$ となると漂流力も0になる[4] ので都合が良いであろう。

3. 種々の場合

i） 部分没水円柱

原点を中心にとれば rolling は考えなくともよい。



y 一方向の条件（2.5）は次のようになる。

$$K=\frac{\omega^2}{g}=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{B+s_2}{\nabla(1+k_2)+\delta_2} \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots \quad (3.1)$$

これは系の固有周期である。

s_2，$\delta_2\approx 0$，$k_2\doteqdot 1$ とすると

$$\frac{\lambda}{2\pi}\doteqdot\frac{2\nabla}{B}\doteqdot\frac{\pi}{4\alpha}D \quad , \quad (B=\alpha D) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.2)$$

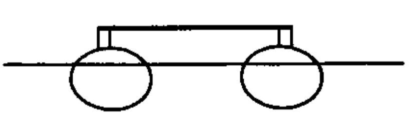
であるから $\lambda=100$ mとすると $D\doteqdot\frac{2}{\pi^2}\alpha\lambda=20\alpha$ mの程度となる。

α を小さくすれば D も小さくなるがその場合は非線型な減衰が出て来るであろう（浸水面の変化による）から注意しなければならない。

又 $s_2=\delta_2=0$ の時はこの周波数は所謂波無し周波数に略々等しいからやはり注意しなければならない。

x 一方向には復原力がないので附加しなければならない。その値は静的復原力（上下方向の）と同程度の大きさでなければならない事は明らかであろう。

そのような装置は繋留装置を工夫して可能であるように思われるが，それが出来なければ図のように上下方向の仕掛を2段，3段と装備する事が考えられるがこれを図のように一体化するならば，これは roll 方向も考えた事に等しくなるからこの場合は roll の周期を理論に合うように調整すればよい。



なお，波のパワーは単位半高について，

$$E_W=\rho g^2/4\omega=\frac{\rho g}{4}\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

であるから $\lambda=100$ m，波高 2 m とすると，

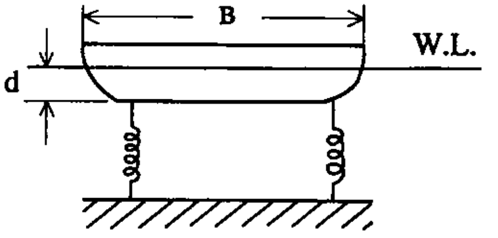
$$E_W / 75 \doteqdot 30 \text{ H.P/m}$$

の程度である。

ii） 筏

sway-motionによる波がrolling によるものより充分小さいならばrolling のみ考えればよく，

$$K=\frac{\nabla m+s_3}{\nabla(1+k_3)\kappa^2+\delta_3}, \quad (3.3)$$



となるが s_3，$\delta_3 \doteqdot 0$，$k_3 \doteqdot 1$ とすると，

$$\nabla m=\frac{B^3}{12}, \quad \nabla\kappa^2 \doteqdot \nabla\frac{B^3}{12}$$

$$K=\frac{2\pi}{\lambda} \doteqdot \frac{1}{d}, \quad \cdots\cdots \quad (3.4)$$

となって d が大きくなりすぎるから，復原力を少なくする必要がある。そのためには半没体として水線面積を小さくするかもしくはバネ系を装着する事である。

一方 y 一方向に関しても前項で見たように半没体としなければ浮体の大きさは非常に大きいものになってしまうので図のような筏はあまり現実的ではなく，前項の最後に指摘したように半没体を何個かならべたような筏の方が現実的であるように思われる。

又このような筏を剛につくるのは大変であろうから剛性による撓みをも考慮した理論を考える必要があろう。

iii） 筏（続）

そのような訳で筏で波消しを実現するのは難かしいが，仮にそれが出来たとしても上下動とrolling の両方に対して別々の適当な減衰を加えるのは大変であるから，これを一つに出来ないだろうか。

これを正面から考えるのは大変であるが，次の定理を利用して逆に考えて行くと簡単にとける。

「波の問題では時間軸を逆にした運動が一般に存在する」

今の場合ある1点に力学系を附け加えて（力を加えて）波を消す事が出来るならば逆にその点に力を加えて片方にだけ波が出て行くような運動があると言う事である。

そのような点を探して見よう。

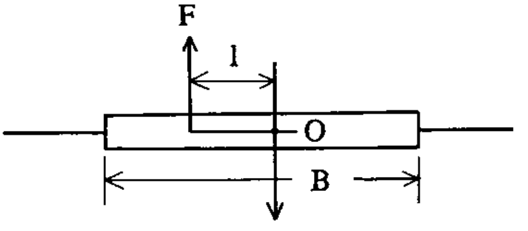
図の ℓ 点に F なる力をかけるとすると運動方程式は，

$$\left.\begin{aligned} K\,C_2\,Y &= F \\ K\,C_3\,\theta &= \ell F \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} C_2 &= \nabla+f_{22}-B/K \\ C_3 &= \nabla\kappa^2+f_{33}-\nabla m/K \end{aligned}\right\}, \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.5)$$

夫々正負の方向に出て行く波の振巾は,

$$\overset{+}{A} = iK\{Y H_2^{+} + \theta H_3^{+}\} ,$$

$$\overset{-}{A} = iK\{Y H_2^{-} + \theta H_3^{-}\}$$
$$= iK\{Y H_2^{+} - \theta H_3^{+}\} , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.6)$$



よって,今 $\overset{-}{A}=0$ になる為には

$$Y H_2^{+} = \theta H_3^{+} , \text{ for } \overset{-}{A}=0, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.7)$$

でなければならない。

一方,(3.5)から

$$\ell C_2 Y = C_3 \theta , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.8)$$

でなければならないから(3.7)は,

$$\ell C_2 H_3^{+} = C_3 H_2^{+}$$

or

$$\ell = \frac{C_3 H_2^{+}}{C_2 H_3^{+}} , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.9)$$

又,正方向に出て行く波の振幅が1である為には(3.7)と(3.6)から,

$$Y = 1/2iKH_2^{+} , \quad \theta = 1/2iKH_3^{+} , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.10)$$

よって(3.5)から $F = C_2/2iH_2^{+} = C_3/2i\ell H_3^{+}$, ……………… (3.11)

のように力も決まる。

このような ℓ が real でありうるであろうか。(real でなければ定点ではなく正負に振動する事になるから)

$K\to 0$ とすると,

$$H_3^{+}(K)/H_2^{+}(K) \xrightarrow[K\to 0]{} \frac{-iK\nabla\overline{OM}}{B - K(1+k_2)\nabla} ,$$

であるから(3.9)より

$$\ell \xrightarrow[K\to 0]{} \frac{i}{\overline{OM}}\left(\kappa^2 + \frac{f_{22}}{\nabla} - m/K\right) , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.12)$$

よって ℓ は rolling の同調点で real になり得,その時,

$$\ell \xrightarrow[K\to 0]{} \frac{|H_3^{+}|^2}{\nabla\overline{OM}} \to K^2\nabla\overline{OM} = \frac{K^2B^3}{12} , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3.13)$$

となって ℓ は非常に小さい事がわかる。

今度は逆に ℓ 点に $-F^*$ なる力が働いて入射波があるとすると運動方程式は，

$$\left.\begin{aligned} KC_2 Y + F^* &= H_2^+ \\ KC_3 \theta + \ell F^* &= H_3^+ \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.14)$$

波が消える為には，$Y = i / 2K\overline{H_2^+}$，　$\theta = i / 2K\overline{H_3^+}$，

でなければならないから，上式に代入して，

$$F^* = C_2 / 2i\,\overline{H_2^+} \quad , \quad \ell F^* = \overline{C_3} / 2i\,\overline{H_3^+} \quad , \quad \cdots\cdots\cdots \quad (3.15)$$

よって，　$\ell = \overline{C_3 \; H_2^+} \; / \; \overline{C_2 \; H_3^+}$ ，

この後の式は ℓ は real とするから（3.9）の ℓ に等しく，又

$$F^* = -F \quad , \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.16)$$

となっている事がわかる。

又 ℓ 点の変位は（$Y + \ell\theta$）であるから，

$$\frac{F^*}{Y+\ell\theta} = \frac{-\overline{C_2}}{1+\ell\,\overline{H_2^+}/\overline{H_3^+}} = \frac{-\overline{C_2\,C_3}}{\overline{C_3}+\ell^2\,\overline{C_2}} \equiv C \; , \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.17)$$

となって F^* は ℓ 点の変位に比例する事がわかり，上式から所要の大きさが計算出来る。

$K\to 0$ の時は（3.13）によって ℓ が与えられ，その時，

$$C \xrightarrow[K\to 0]{} \frac{B-K(1+k_2)\nabla - iK\,|H_2^+|^2}{1+iK\{B-K(1+k_2)\nabla\}} \to -\overline{C_2} \quad , \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.18)$$

となって，これは上下動のみで波を消す場合の条件に略々等しい。

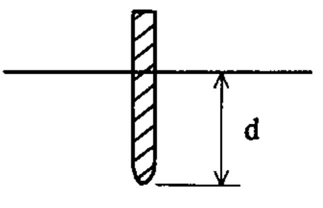
一方，ℓ が real である為の条件は rollingの同調点であったから，結局前節で見たような困難は同じであるが，1点において力を加えて波を消す事は原理的には可能であると思われる。

iv）　垂直平板

今度は上下動によって殆ど波が起きない場合であるがこの時はA(17)により，

$H_4^+ = -H_4^-$ であるからA(20)第1式は，

$$A_R + A_T = 1 \; , \quad \cdots\cdots \quad (3.19)$$



となる。

従って波を全部消す事は出来ず，理想的に行っても半分であるし，又 $A_R = 0$ ならば $A_T = 1$，$A_T = 0$ ならば $A_R = 1$ であるがこの点は次項

で考えよう。

rollingの同調点は s_1，s_{13}，δ_1，$\delta_3 \doteqdot 0$ とすると，

$$\nabla \kappa^2(1+k_3)=\frac{\nabla m}{K}+\frac{f_{13c}^2}{\nabla+f_{11c}} \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.2\,0)$$

であるから更に $k_3=1$，$f_{13c}^2 / (\nabla+f_{11c}) \doteqdot \frac{\nabla}{2}\cdot\frac{d^2}{4}$，$\nabla\kappa^2 \doteqdot \nabla\frac{d^2}{12}$ ，

とおくと，

$$K \doteqdot m / \left(\frac{d^2}{6}-\frac{d^2}{8}\right) = 24\,m/d^2 \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.2\,1)$$

となるから $\lambda=100\,\mathrm{m}$，$d=10\,\mathrm{m}$とすると $m\equiv\overline{GM}\doteqdot\frac{1}{4}$ （m） の程度となる。

又，外力の系の着力点の位置は，A (43) により ℓ_w であるから，

$$\ell_w \xrightarrow[K\to 0]{} \frac{k_1\ \ell_1}{1+k_1} \doteqdot \frac{d}{4}\left(k_1\doteqdot 1,\ \ell_1\doteqdot\frac{d}{2}\right), \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.2\,2)$$

となる。

このようにrollingの条件を満足させる事は容易に見えるが上下方向には波が起きないとすると波は半分しか消せない訳である。

又渦減衰のようなものも大きいと考えられるので実験的によく検討する必要がある。

つまり渦減衰が造波減衰より大きいならば波を消すには逆に仕事を供給してやらねばならない事になり，又それが丁度等しくなれば外部に系をつくる必要はない。

なおその時は反射波は残るので漂流力が働く故それをとめる必要があるがその繋留点は上の考察から ℓ_w がよいことになる。

V） 垂直平板（続）

（3.1 4）により $A_R=0$ ならば $A_T=1$，$A_T=0$ ならば $A_R=1$ であるが，そのような場合の実現性について考えて見よう。

A (18) により，

$$A_R=\frac{H_{1s}^{+}}{\overline{H_1^{+}}}+\ i\,KH_1^{+}(X+\ell_w\,\theta)$$

又A(34) より $\quad K(X+\ell_w\,\theta)=\dfrac{\triangle_s}{(1+\beta)\triangle\overline{H_1^{+}}}$，$\quad \triangle=\triangle_c-i\,\triangle_s$ ，

よって，

$$A_R=i\,\frac{H_{1s}^{+}}{\overline{H_1^{+}}}+\frac{i\,\triangle_s\ H_1^{+}}{(1+\beta)\triangle\overline{H_1^{+}}} , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.2\,3)$$

従って，

$$\frac{\triangle_s}{\triangle} = -(1+\beta)\frac{H_{1s}^+}{H_1^+}, \quad \text{for} \quad A_R=0, \ A_T=1, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.24)$$

$$\frac{\triangle_s}{\triangle} = i(1+\beta)H_{1c}^+ / H_1^+, \quad \text{for} \quad A_R=1, \ A_T=0, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.25)$$

ここで，

$$\triangle = \triangle_c - i\triangle_s = |\triangle| e^{i(\pi+\delta)}, \quad \pi>\delta>0, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.26)$$

$$H_1^+ = H_{1c} + iH_{1s}^+ = |H_1^+| e^{-i(\alpha+\frac{\pi}{2})}, \quad 0<\alpha<\frac{\pi}{2},$$

$$H_{1c}^+ = -i|H_1^+|\cos\alpha, \quad H_{1s}^+ = +i|H_1^+|\sin\alpha, \qquad (3.27)$$

なお，

$$\alpha = \tan^{-1}\left\{\frac{\pi I_1(Kd)}{K_1(Kd)}\right\}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.28)$$ [3)]

なる関係がある。

このようにおくと（3.24），（3.25）は，

$$(1+\beta)\sin\delta\, e^{-i\delta} = \begin{cases} -\sin\alpha\, e^{i\alpha} & \text{for } A_R=0 \\ -i\cos\alpha\, e^{i\alpha} & \text{for } A_T=0 \end{cases}$$

となり，結局これを満足するには，

$$\delta = \pi-\alpha, \ \beta=0, \qquad \text{for} \quad A_R=0, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.29)$$

$$\delta = \frac{\pi}{2}-\alpha, \ \beta=0, \qquad \text{for} \quad A_T=0, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.30)$$

でなければならない。

$\beta=0$でなければならない事はA_R or A_Tのどちらかが1つまり入射波のエネルギーが完全に反射又は透過する事から明らかであろう。

いずれにしてもδを上のように調のえる事は可能であろう。

vi）　造波機型式（フラップ式）

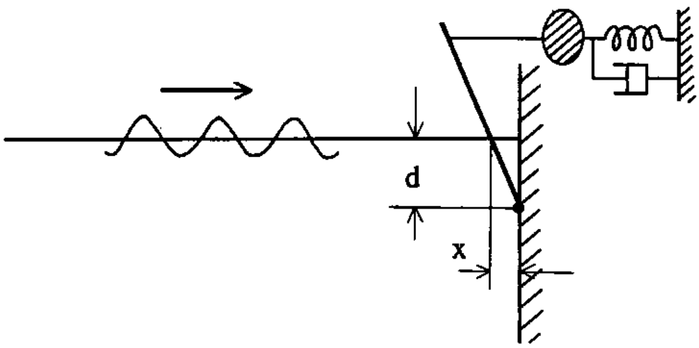
J. H. Milgramによって研究された例であるが，こゝでは水深は充分深いとし又受動的な図のような機械系を附加するものとして考えよう。

今迄の例と異なるのは波は壁によって完全に反射される点である。

$$H_4^+ = 1, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.31)$$

又，振幅Xのフラップ式造波装置の起す波についてはHavelockによりA(10)の形で，

$$H^+(K) = -2\int_0^d (d-y)\, e^{-Ky}\, dy$$



$$= -\frac{2d}{K} + \frac{2}{K^2}\left(1 - e^{-Kd}\right) \xrightarrow[K\to 0]{} -d^2 \ ,$$

$$\xrightarrow[K\to\infty]{} -\frac{2d}{K} \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.32)$$

従って反射波は

$$A_R = 1 + iKXH^+(K) \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.33)$$

と表わされ $A_R = 0$ とする為には，

$$\left. \begin{aligned} X = -\frac{1}{iKH^+} &\xrightarrow[K\to 0]{} \frac{1}{iKd^2} \\ &\xrightarrow[K\to\infty]{} \frac{1}{2id} \end{aligned} \right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.34)$$

一方フラップに働く動水圧は反射波も含めると入射波のみの倍となるから，

$$p = 2\rho g\, e^{-Ky}$$

よってフラップのなす仕事は，

$$W = \frac{1}{T}\int_0^T dt \int_0^d p(y)\dot{X}(d-y)\,dy \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.35)$$

所で，

$$\int_0^d p(y)(d-y)\,dy = -\rho g H^+(K) \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.36)$$

$\dot{X} = i\omega X = -\omega / KH^+$ であるから，

$$W = \frac{\rho g^2}{2\omega} = 2E_W \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3.37)$$

しかしフラップがつくる波の振幅は（3.3 3）により単位振幅であるからその為に必要なパワーは E_w で後の半分のパワーは系外に供給したことになる。

後って図のような系をつくって波と同調させ，波のパワーを吸収することが出来る。

4. 結 び

以上の考察から浮遊式消波装置はその動揺周期を入射波のそれに同調させ，さらに適当な減衰を附加すれば効率よく波を消す事がわかり，又その時漂流力も小さくなる事がわかった。

そして又この時機械的減衰系の替りに発電機を使う事にすれば波からエネルギーを取り出す事が出来，その量は波が消えた時に最大である事は明らかであるから波力の利用と波消しは両立する概念である。

しかし実用的には種々の波長に対してよく効くものを考えねばならず，又渦減衰等も一般に形状がスマートな形ではないと考えられるのでその形状に応じて実験的に検討する必要があろう。

以 上

参考文献

1） J. H. Milgram；J. F. M. vol. 43 （1970），pp. 845－859

2） T. Y. Wu；J. S. R.，March, 1972.

3） J. Kotik；J. S. R.，October，1963.

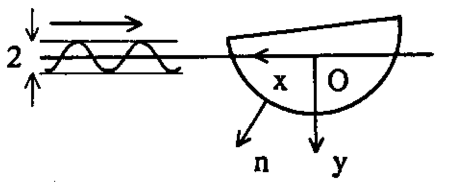
4） 別所正利；防大理工学研究報告，3巻1号，昭和40年5月

5） 〃 ； 〃 ，3巻3号，昭和41年1月

A　附録

必要な理論式は大体文献(4)(5)に従うが，あいまいな点もあるので以下にまとめて記す。

座標軸等は図のようにとる。



速度ポテンシャルを$\Phi(x, y, t)$，圧力を$P(x, y, t)$，水面変位を$H(x, t)$とし，それらを

$$\left.\begin{aligned} \Phi(x,y,t) &= Re\{\varphi(x,y)e^{i\omega t}\}, \\ P(x,y,t) &= Re\{p(x,y)e^{i\omega t}\}, \\ H(x,t) &= Re\{\eta(x)\ e^{i\omega t}\}, \end{aligned}\right\} \cdots(1)$$

とおくと，

$$p(x, y) = \rho i\omega\varphi(x, y), \qquad \cdots\cdots(2)$$

$$\eta(x) = \frac{\omega}{ig}\varphi(x, 0), \qquad \cdots\cdots(3)$$

水面条件は，

$$K\varphi(x, 0)+\varphi_y(x, 0)=0,\ K=\omega^2/g=2\pi/\lambda, \qquad \cdots\cdots(4)$$

である。

入射波は，

$$\eta_0(x, t) = Re\{e^{iKx+i\omega t}\}, \qquad \cdots\cdots(5)$$

とするとそのポテンシャル等は，

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, y, t) &= Re\{\varphi_0(x, y)e^{i\omega t}\}, \\ \varphi_0(x, y) &= \frac{ig}{\omega}\phi_0(x, y), \\ \phi_0(x, y) &= e^{-Ky+iKx}, \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(6)$$

とかける。

線型性を仮定すると全ポテンシャルは，

$$\varphi(x, y) = i\omega\sum_{j=0}^{4} X_j\ \phi_j(x, y), \qquad \cdots\cdots(7)$$

ここに，$X_1\equiv X$，$X_2\equiv Y$，$X_3\equiv\theta$，$X_0=X_4=1/K$　は夫々の振幅とする。

境界条件は，

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial n}\varphi_j=-i\omega X_j\frac{\partial x_j}{\partial n},\quad \frac{\partial}{\partial n}\phi_j=-\frac{\partial}{\partial n}x_j,\ j=1,2,3, \\ &\frac{\partial}{\partial n}\varphi_4=-\frac{\partial}{\partial n}\varphi_0,\quad \frac{\partial}{\partial n}\phi_4=-\frac{\partial}{\partial n}\phi_0, \\ &\text{但し,}\quad x_1\equiv x,\ x_2\equiv y,\ \frac{\partial}{\partial n}x_3=y\frac{\partial x}{\partial n}-x\frac{\partial y}{\partial n}, \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(8)$$

$|x| \gg 1$ では，

$$\phi(x, y) \xrightarrow[|x|\gg 1]{} i\, H^{\pm}(K) e^{-Ky \mp iKx} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (9)$$

但し上側符号は $x > 0$ の時，下側のは $x < 0$ の時とする。

又，

$$H^{\pm}(K) = \int_C \left(\frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-Ky \pm iKx} ds, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (10)$$

ポテンシャルをその実虚部にわけて，

$$\phi = \phi_c + i\,\phi_s \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (11)$$

とかくと，それに応じて

$$H^{\pm}_{c,s} = \int_C \left(\frac{\partial}{\partial n} \phi_{c,s} - \phi_{c,s} \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{-Ky \pm iKx} ds, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (12)$$

とかく事が出来るが，この H_c，H_s は実であるとは限らない。

物体が左右対称ならば，上下動では

$$H_2^{+}(K) = H_2^{-}(K) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (13)$$

で H^{+}_{2c} ，H^{+}_{2s} は共に実数値をとる。

左右，回転動では

$$H_j^{+}(K) = -H_j^{-}(K), \quad j = 1, 3, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (14)$$

で H^{+}_{jc} ，H^{+}_{js} は共に虚である。

散乱波については，

$$\begin{aligned} H_4^{+}(K) &= H^{+}_{4c} + i\, H^{+}_{4s} \\ H_4^{-}(K) &= \overline{H^{+}_{4c}} + i\, \overline{H^{+}_{4s}} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (15)$$

となる。

又，$$H_3^{\pm}(K) = \ell_w\, H_1^{\pm}(K) \quad , \qquad \ell_w ;\ \mathrm{real} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (16)$$

なる関係があり，散乱波については，

$$H_4^{\pm}(K) = \frac{H^{+}_{2s}}{\overline{H_2^{+}}} \pm \frac{H^{+}_{1s}}{\overline{H_1^{+}}} \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (17)$$

なる簡単な関係があり，波については H_1^{+} と H_2^{+} がわかればすべてわかる事になる。

外に出て行く波の振幅は，(1)，(9)によって，

$$\sum_j \eta_j(x) = \frac{\omega}{i g}\sum_j \varphi_j = \frac{\omega^2}{g}\sum_j X_j\ \phi_j \rightarrow iK\ \sum X_j\ H_j^{\pm}(K)\ e^{\mp iKx} \quad ,$$

であるから反射波の振幅は，

$$A_R = iK \sum_{j=1}^{4} X_j\ H_j^{+}(K) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (18)$$

入射波も含めた透過波のそれは，

$$A_T = 1 + iK \sum_{j=1}^{4} X_j\ H_j^{-}(K) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (19)$$

そうすると（13），(14)，(15) を代入して，

$$A_R + A_T = 1 + i\ (H_4^{+} + H_4^{-}) + 2iKYH_2^{+}\ ,$$

$$A_R - A_T = -1 + i\ (H_4^{+} - H_4^{-}) + 2iK\{XH_1^{+} + \theta H_3^{+}\}\ ,$$

所で

$$\left.\begin{aligned} 1 + i\ \{H_4^{+} + H_4^{-}\} &= H_2^{+} / \overline{H_2^{+}} \\ 1 + i\ \{H_4^{-} - H_4^{+}\} &= -H_1^{+} / \overline{H_1^{+}} \end{aligned}\right\}$$

であるから

$$\left.\begin{aligned} A_T + A_R &= \frac{H_2^{+}}{\overline{H_2^{+}}} + 2iKYH_2^{+}\ , \\ A_R - A_T &= \frac{H_1^{+}}{\overline{H_1^{+}}} + 2iK\{XH_1^{+} + \theta H_3^{+}\}\ , \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (20)$$

を得る。

次に i 番目の運動による j 方向の力又はモーメントは $Re\{F_{ij}\quad {}^{i\omega t}\}$，とすると

$$F_{ij} = -\int_C p_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = -\rho i \omega \int_C \varphi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = \rho\omega^2 X_i \int \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds$$

$$== \rho\omega^2 X_i\ f_{i,j} \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (21)$$

ここに

$$f_{ij} = \int_C \phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds = -\int \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds = f_{j,i} \quad , \qquad \cdots\cdots \quad (22)$$

となる。

但し，　$i\ ,\ j = 1, 2, 3$

波の力は $Re\{E_j e^{i\omega t}\}$ とおくと,

$$E_j = -\int (p_0 + p_4)\frac{\partial x_j}{\partial n} ds = -\rho g H_j^+(K) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

となる。

運動方程式は系外の力を F_j ($j=1,2,3$) とすると,

$$\left.\begin{aligned} -\omega^2 M X &= F_{11} + F_{3,1} + E_1 + F_1 \ , \\ -\omega^2 I\theta - Wm\theta &= F_{1,3} + F_{33} + E_3 + F_3 \ , \\ -\omega^2 MY + \rho g BY &= F_{22} + E_2 + F_2 \ , \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (25)$$

Mは質量, Iは質量慣性モーメント, $W=gM$, $m=\overline{GM}$, Bは水線幅とする。

(21) を代入し, $M=\rho\nabla$, $I=\rho\nabla\kappa^2$ とすると, 上式は

$$\left.\begin{aligned} &-K(\nabla + f_{11})X - Kf_{13}\theta = -H_1^+(K) + F_1/\rho g \ , \\ &\{-K(\nabla\kappa^2 + f_{33}) + \nabla m\}\theta - Kf_{31}X = -H_3 + F_3/\rho g \ , \\ &\{-K(\nabla + f_{22}) + B\}Y = -H_2^+ + F_2/\rho g \ , \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (26)$$

となる。

今 F_j が

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho g}F_1 &= (K\delta_1 - s_1 - iK\mu_1)X + (K\delta_{13} - s_{13} - iK\mu_{13})\theta \ , \\ \frac{1}{\rho g}F_3 &= (K\delta_3 - s_3 - iK\mu_3)\theta + (K\delta_{31} - s_{31} - iK\mu_{31})X \ , \\ \frac{1}{\rho g}F_2 &= (K\delta_2 - s_2 - iK\mu_2)Y \ , \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (27)$$

のように与えられる。つまり外部にこのような力学系を考えると,

(26) から

$$\left.\begin{aligned} C_1'X + C_{13}'\theta &= H_1^+/K \ , \\ C_3'\theta + C_{31}'X &= H_3^+/K \ , \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (28)$$

$$C_2'Y = H_2^+/K \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (29)$$

$$\left.\begin{aligned} C_1' &= \nabla + f_{11c} + \delta_1 - s_1/K - i(\mu_1 + |H_1^+|^2) \ , \\ C_3' &= \nabla\kappa^2 + f_{33c} + \delta_3 - s_3/K - \frac{\nabla m}{K} - i\{\mu_3 + |H_3^+|^2\} \ , \\ C_2' &= \nabla + f_{22c} + \delta_2 - (B + s_2)/K - i(\mu_2 + |H_2^+|^2) \ , \\ C_{13}' &= f_{13c} + \delta_{13} - \frac{s_{13}}{K} - i\{\beta_{13} + H_1^+\overline{H_3^+}\} \ , \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (30)$$

$f_{i,jc}$ は f_{ij} の real part を意味する。なお $Im\{f_{i,j}\} = -H_i\overline{H_j}$ である。
ここで

$$\mu_j = \beta_j \mid H_j^+ \mid^2 \quad , \quad \mu_{1,3} = \beta_{13} H_1^+ H_3^+ = \mu_{31} \quad , \cdots\cdots\cdots \quad (31)$$

とおいておこう。

そうすると先ず (29) の解は，　$KY = H_2^+(K) / C_2'$,　　…………… (32)

で特に同調時には

$$KY = \frac{i}{(1+\beta_2)\overline{H_2^+}} \ , \text{ for } \nabla + f_{22c} + \delta_2 = \frac{B+s_2}{K} , \cdots\cdots\cdots \quad (33)$$

次にもしθを考える必要がなければXについて上式と同形になるが一般には，

$$KX = D_1 / \triangle \quad , \quad K\theta = D_3 / \triangle \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (34)$$

$$\left.\begin{aligned} \triangle &= C_1' C_3' - (C_{13}')^2 \quad , \\ D_1 &= C_3' H_1^+ - C_{13}' H_3^+ \quad , \quad D_3 = C_1' H_3^+ - C_{13}' H_1^+ \quad , \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (35)$$

ここで更に，　$\beta_1 = \beta_3 = \beta_{13}$,　　…………… (36)

とおくと D_1 , D_3 は実になって

$$X / \theta = D_1 / D_3 = \ell \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (37)$$

なるℓは実になる。（rolling 中心）

さて同調時には

$$Re\{C_1' C_3' - (C_{13})^2\} = 0 \qquad \cdots\cdots \quad (38)$$

の時　$Im\{C_1' C_3' - (C_{13}')^2\} = -(1+\beta) | H_1^+ |^2 \{C_1' \ell_w^2 + C_3' - 2 \ell_w C_{13}'\}$,

となるので

$$\left.\begin{aligned} K\theta &= \frac{i}{1+\beta_1} \ \frac{\ell_w C_1' - C_{13}'}{\overline{H_1^+}} \Big/ (\ell_w^2 C_1' + C_3' - 2 \ell_w C_{13}') , \\ KX &= \frac{i}{(1+\beta_1)} \ \frac{(C_3' - \ell_w C_{13}')}{\overline{H_1^+}} \Big/ (\ell_w^2 C_1' + C_3' - 2 \ell_w C_{13}') , \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \quad (39)$$

よつて，　$KXH_1^+ + K\theta H_3^+ = i H_1^+ / (1+\beta)\overline{H_1^+}$,　　…………… (40)

左右動と rolling は元来独立でないから系外の力も独立にする必要はなく，ある1点に作用させればよいと考えられる。

それを $F_3 = \ell F_1$ とおくと (27)，(36) から

$$\left.\begin{aligned} &\ell \delta_1 = \delta_{13} , \quad \ell \delta_{13} = \delta_3 \quad , \quad \delta_3 = \ell^2 \delta_1 \quad , \\ &\ell s_1 = s_{13} , \quad \ell s_{13} = s_3 \quad , \quad s_3 = \ell^2 s_1 \quad , \\ &\ell \mu_1 = \mu_{13} , \quad \ell \mu_{13} = \mu_3 \quad , \quad \mu_3 = \ell^2 \mu_1 \quad , \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (41)$$

でなければならず，この最後の式から

$$\beta_3 \mid H_3^+ \mid^2 = \beta_1 \ell^2 \mid H_1^+ \mid^2 \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (42)$$

であるから結局 $\ell = \ell_w$, $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (43)

でなければならない。

従って力は

$$\frac{F_1}{\rho g} = (\kappa \delta_1 - s_1 - i \mu_1)(X + \ell_w \theta) , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (44)$$

$$F_3 = \ell_w F_1$$

となる。

以 上