翼理論に関する覚書

別 所 正 利*

A Short Note on Aerofoil Theory
—Lagrangean and Arbitrality of Solution—

Masatoshi Bessho

内 容 目 次

概 要

水の波の理論は先行した翼理論に多くのものを負っている事は周知の通りであり，今尚我々が新しい問題に取組む時に殆ど唯一の範例である。

しかしながら船には船特有の事情があって飛行機の翼理論をそのまゝ適用するのは必ずしも適当でない場合がある。

本文はそのような過程でこの数年の間に著者が気付いた事を記して見たものである。

先ず1節では翼理論における相反定理について従来使われているFlaxの変分原理に基づくもの以外に花岡が造波抵抗理論について導出した第2定理を紹介し，その汎関数は運動ポテンシャル又はラグランジアンである事を説明する。

次に2節では造波理論的な記述で翼理論を表現し，3節では境界値問題の積分方程式を少し変形してその任意性について考察する。

1. 相反定理とラグランジアン

Flax の変分原理は次の相反定理（Munk's）から導かれる。

$$\iint_F p_1 \widetilde{w_2}\, dF = \iint_F \widetilde{p_2}\, w_1\, dF \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1\cdot1)^{4)}$$

ここに Fは翼面，dFはその面素，（p_1，w_1），（$\widetilde{p_2}$，$\widetilde{w_2}$）は夫々圧力と z 一方向速度で(～)印は逆流れの量である事を示す。

日本造船学会試験水槽委員会第1部会 1980. 6. 27

花岡は造波理論において上式に対応するものを第1定理と称し，もう一つ次の第2定理を導出している。[3]

$$\iint_F \triangle\phi_1 \frac{\partial \widetilde{\phi_2}}{\partial z}\, dF = \iint_F \triangle\widetilde{\phi}_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial z}\, dF \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot 2)$$

こゝに ϕ_i は速度ポテンシャルで$\triangle\phi$はFの上下の差を意味する。

これはFが薄翼でない時は次のようになる。

$$\iint_S \phi_1 \frac{\partial \widetilde{\phi_2}}{\partial n}\, dS = \iint_S \widetilde{\phi_2} \frac{\partial \phi_1}{\partial n}\, dS \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot 3)$$

こゝに nは面Sの法線とする。

一方 (1・1) は薄翼でなければ成立せず，[3] またクッタの条件を満たす流れでなければならない。

しかし (1・2)，(1・3) ではその必要がないので一般性がある。

さて薄翼理論では更に

$$\int^x \frac{\partial \phi}{\partial z}\, dx = \zeta(x, y, z) \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot 4)$$

なる量，つまり流体粒子のz方向変位を導入すると (1・2) は次のように書ける。

$$\iint_F p_1\, \widetilde{\zeta_2}\, dF = \iint_F \widetilde{p_2}\, \zeta_1\, dF \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot 5)$$

これはMunk の定理と同様に有用である。[8]

しかし (1・1) は誘導抵抗を意味するのに対して (1・2)，(1・3) 又は (1・5) は物理的意味が判然としない。

一方造波理論では(1・3)はラグランジアン，つまり運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差である事がわかっている[9] ので翼理論でもそうなっていると考えられるが，この場合のポテンシャルエネルギーとは何であろうか。

さてこの点を考える前に (1・2) の形で次の積分を考えよう。

$$L = \frac{\rho}{2} \iint_F \triangle\phi \frac{\partial \phi}{\partial z}\, dF \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot 6)$$

翼面Fとその後方にそれに連続してTrefftz 面下を考え又充分大きいF，Tを包む球面Rとの間に包まれた領域をDとするとグリーンの定理により

$$L = \frac{\rho}{2} \iiint_D (\nabla\phi)^2\, dx\, dy\, dz - \frac{\rho}{2} \iint_T \nabla\phi \frac{\partial \phi}{\partial z}\, dF + \frac{\rho}{2} \iint_R \phi \frac{\partial \phi}{\partial R}\, dS$$

となるが次節 (2・6)，(2・7) により右辺第3項の積分は0となるので結局

$$L=\frac{\rho}{2}\iiint_D(\nabla\phi)^2\,dx\,dy\,dz-\frac{\rho}{2}\iint_T\triangle\phi\frac{\partial\phi}{\partial z}\,dF\ ,\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\cdot7)$$

右辺第1項は明らかに運動エネルギーであり，第2項はTrefftz面の運動エネルギーを流れ方向に積分したものであり両者共無限大となるがその差は有限となっている。

これは又圧力を積分しても同じ形になりラグランジアンである事が古くから示されている。[1)]

従って(1・7)右辺第2項はポテンシャルエネルギーに対応している事になるがこの辺を理解する為に2次元で考えて見よう。

今原点にΓのサーキュレーションをおき，それからx離れた所に強さは同じで向きが反対の渦をおくと相互引力Fは

$$F=\frac{\rho\Gamma^2}{2\pi x}\ ,\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\cdot8)$$

相互距離aなる点から一方の渦をRなる距離まで準静的に引きはなすに必要な仕事Uは

$$U=\int_a^R F\,dx=\frac{\rho\Gamma^2}{2\pi}\log\left(\frac{R}{a}\right)\ ,\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\cdot9)$$

これは定義からポテンシャル・エネルギーである。

一方Rが充分大きい時の一つの渦による運動エネルギーは $\phi=\frac{\Gamma}{2\pi}\theta$ であるから

$$\frac{T}{2}=\frac{\rho}{2}\iint_D(\nabla\phi)^2\,dx\,dy=\frac{\rho}{2}\int_R\phi\frac{\partial\phi}{\partial r}\,ds-\frac{\rho}{2}\int_\varepsilon\phi\frac{\partial\phi}{\partial r}\,ds$$

$$-\frac{\rho}{2}\int_T\triangle\phi\frac{\partial\phi}{r\,d\theta}\,dr\ ,$$

こゝにRは充分大きい円，εは原点囲りの小さい円，Tは適当なcutとする。

明らかに右辺第1，2項は0となるから2つの渦の運動エネルギーは

$$T=\frac{\rho\Gamma^2}{2\pi}\log\left(\frac{R}{a}\right)\ ,\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\cdot10)$$

それ故，この場合は

$$T-U=0\ ,\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1\cdot11)$$

一般には有限となって(1・3)の形になる。

また，この誘導の過程から考えると吹出しが存在する場合も同様で最初有限な所に吸込みを考えそれを準静的に無限遠方まで持って行く仕事が位置エネルギーである。

2. 速度ポテンシャルと漸近展開

この節では普通に知られているTrefftz 面，つまり充分後流側の速度ポテンシャルの近似値と共に充分上流側の値の近似値を求める。

さて速度ポテンシャルは[2)]

$$\phi(x,y,z)=\iint_F p(x',y')\,S(x-x',\,y-y',\,z)\,dF(x',y'),\ \cdots\quad(2\cdot1)$$

こゝに p は圧力分布を ρU^2 で割ったものとし以下速度は単位と考える。

$$S(x,y,z)=\frac{z}{2\pi\rho^2}\left(\frac{x}{r}-1\right)=\frac{z}{2\pi r(r+x)}\ ,\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2\cdot2)$$

$$\rho=\sqrt{y^2+z^2}\ ,\qquad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

充分遠方では

$$S(x-x',\,y-y',\,z)\ \to S(x,y-y',z)+x'\frac{\partial}{\partial x}S(x,y-y',z)+\cdots\qquad(2\cdot3)$$

のようになるので第1項のみとると上流側では

$$S(x,y,z)=\frac{z}{2\pi r(r+x)}\xrightarrow[x\gg1]{}\frac{z}{4\pi r^2}\ \text{or}\ \frac{z}{4\pi x^2}\ ,\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2\cdot4)$$

下流側では

$$S(x,y,z)=-\frac{z}{2\pi\rho^2}\left(1+\frac{|x|}{r}\right)\xrightarrow[x\gg-1]{}-\frac{z}{\pi\rho^2}-\frac{z}{4\pi x^2}\ ,\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2\cdot5)$$

それ故，(2・4)，(2・5) を (2・1) に代入して

$$\phi(x,y,z)\xrightarrow[x\gg1]{}\frac{z}{4\pi x^2}\iint_F p\,dF+\cdots\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2\cdot6)$$

$$\phi(x,y,z)\xrightarrow[x\gg-1]{}-\frac{z}{\pi}\iint_F\frac{p(x',y')\,dF}{z^2+(y-y')^2}-\frac{z}{4\pi x^2}\iint_F p\,dF+\ \cdots\ \cdots\ (2\cdot7)$$

言うまでもなく (2・7) 右辺第1項はTrefftz planeの速度ポテンシャルで第2項は (2・6)，つまり上流値の値と符号が逆になっており，これは揚力に比例する。

また，これらの式は $r\fallingdotseq x$ と仮定したがそうでない時は((2・2)，(2・4) からもっと正確に見積る事が出来る事は自明だろう。

3. 解の任意性

よく知られているように境界条件は次の積分方程式となる。

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial z}\right|_{z=0} = w(x, y, 0) = \frac{1}{2\pi}\iint_F \frac{p(x', y')}{(y-y')^2}\left(\frac{x-x'}{R}-1\right) dx'\, dy' , \quad \cdots\cdots (3 \cdot 1)$$

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

この解は翼後端においてクッタの条件を満たす時に一意的に定まると考えられている。

しかし本来渦のある流れは粘性を考えない限り不定であって数学的には決められず物理的に最ともっともらしい数学模型があるだけである。

又実際例えば矩形翼などで後端でKuttaの条件を満たすのは当然として翼端はどうなるのか，あるいはどうなっているのかは一つの疑問である。

その辺を考えるために上式を少し変形して解の任意性がどれ位あるかを調べて見よう。

その為に上式を x で微分したものを考えよう。

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\iint_F \frac{p\, dF}{r} , \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3 \cdot 2)$$

ϕ はラプラシアンを満たすから次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial x} w(x, y, 0) = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{1}{2\pi}\iint_F \frac{p}{R}\, dx'\, dy' , \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3 \cdot 3)$$

あらためて

$$\frac{1}{2\pi}\iint_F \frac{p}{R}\, dF = f(x, y) , \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3 \cdot 4)$$

として f を未知関数とすると (3・3) は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x, y) = -\frac{\partial w}{\partial x}(x, y, 0) , \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3 \cdot 5)$$

となってポアッソンの微分方程式となる。

それ故，解は特解 $a(x, y)$ と任意の調和関数 $h(x, y)$ となる。

$$f(x, y) = a(x, y) + h(x, y) , \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3 \cdot 6)$$

これを (3・4) の右辺に代入すると準特異核を持つ積分方程式となり教科書によれば解 p は一意的に定まる。

従って解の任意性は(3・6) の調和関数に依存し，それは F 内で級数展開すると考えると可附番無限個だけある。

さてもう少し具体的に境界条件を考えよう。簡単のために

$$w(x, y, 0) = \alpha + \beta x , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot 7)$$

とおくと視察によって特解 a を

$$a(x, y) = \alpha x + \frac{\beta}{2} x^2 , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot 8)$$

と置いておこう。右辺第1項は調和関数で(3・5)からは決まらないけれどこうおいても不都合はないだろう。これに対する(3・4)の解は αx に対しては p は前後反対称（以下 F は前後対称翼とする），$\frac{\beta}{2} x^2$ に対しては前後対称となりこれらは共に渦なし流れであると考えられ当然前後端で無限大となっているであろう。

それ故クッタの条件を満たす為には(3・6)の調和関数に対応する p の解を利用せざるを得ない。つまり具体的に後縁の N ケの点でクッタの条件を満たすには N ケの解が必要である。それではこの解を一杯用意して前縁でも流入条件を満たす（Shock -free）事が出来るかと言うと対称翼で考えればわかるようにそれは $\alpha = 0$ の場合しかないだろう。

以上の考察から少くとも対称翼では後縁全体でクッタの条件を満たす事が出来ると考えられる。従って最初に考えた矩形翼では翼端についても少くとも後半部についてはクッタの条件を指定してよいと考えられる。

さて最後に積分方程式(3・4)は(3・1)に比して特異性が弱いので数値計算上都合がよいと考えられまた，一方近似理論を作るにも都合が良いと考えられる。

今，例として細長翼理論をとりあげよう。まず翼幅方向に楕円分布を仮定すれば

$$p(x, y) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\eta^2(x) - y^2} \ \ell(x) / \eta^2(x) , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot 9)$$

(3・4)の左辺は

$$\frac{1}{\pi^2} \int \frac{\ell(x')\,dx'}{\eta^2(x')} \int_{-\eta(x')}^{\eta(x')} \frac{\sqrt{\eta^2 - y'^2}\ dy'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} = a + h , \qquad \cdots\cdots (3\cdot 10)$$

y' に関する積分は $y = 0$ とおくと完全楕円積分となり，$x = x'$ で対数的特異性を有しその見積りについては1案を示した事がある。[10)]

(3・4)の右辺の任意関数 $h(x, y)$ は左右対称だが

$$h(x, y) = 1,\ x,\ x^2 - y^2 , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot 11)$$

であって，$y = 0$ の所では x の巾級数としてよい。しかもそれは任意でよいので解は決まらなくなる。これに(3・9)のように圧力分布を仮定し，しかも中心線上でのみ境界条件を指定した所為でこの場合は(3・11)の第2項までとるべきである。

つまり y 方向の揚力分布形に応じて(3・11)の項数を増やしておけばよい事になる。

結　論

以上薄翼理論においても花岡の第２相反定理は有用であり得る，特にクッタの条件を満たさないものにも適用出来る点で，その積分はラグランジアンである事を示し次に遠場特に上流側の漸近展開を求め，最後に境界積分方程式を変形して解の任意性を陽にあらわし，クッタの条件の指定範囲について考察した。

参考文献

1) R. Hargreaves, " A Pressure Integral as Kinetic Potential ", Phil. Mag., 1922, pp.436-445
2) H. Ashley & M. Landahl, " Aerodynamics of Wings & Bodies ", Addison-Weseley, 1965
3) T. Hanaoka, " On Reverse Flow Theorem Concerning Wave-Making Theory ", Proc. 9-th Japan Nat. Congress for Appl. Mecha., 1959
4) D. B. Davies, " An Application of Flax's Variational Principle to Lifting-Surface Theory ", R. & M., No.3564, Apr. 1967
5) H. R. Lawrence, " The Lift Distribution on Low Aspect Ratio Wings at Subsonic Speeds ", J. of Aero. Sci., Oct., 1951
6) E. O. Tuck, " Some Method for Flows past Blunt Slender Bodies". J. F. M., vol.18, 1964
7) F. Ursell and G. N. Ward, " On some general theory in linearized theory of compressible flow ", Q. J. M. A. M., vol.3, 1950
8) M. Bessho & K. Nomura, " A Contribution to the Theory of Two-dimensional Hydro-planing ", Mem. Def. Acad. vol. 10, 1970
9) M. Bessho, " Variational Approaches to Study Ship Wave Problem ", 8-th Sym. on Naval Hydro., 1970
10) 別所正利"細長翼細長体理論に関する覚書"　水槽委員会第２部会資料　昭和５０年６月２７日