「自由表現をもつ一様半無限領域における 2次元弾性波の放射散乱について」

別所正利

目次内容

1. 場の方程式と境界条件

現象はすべて周期的である場合を考える事とし，そのすべての量は時間因子 $e^{i\omega t}$ を省略して複素表示するものとする。（ωは円周波数）

u_1，u_2 を夫々x，y方向の変位とすると，その方程式は△をラプランシアンとして

$$(\triangle+k^2)u_i+\frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{\partial\gamma}{\partial x_i}=0,\quad i=1,\ 2, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot 1)$$

ここに
$$\gamma=\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot 2)$$

$$x_1\equiv x\ ,\quad x_2\equiv y$$

また
$$k^2=\rho\frac{\omega^2}{G}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot 3)$$

ρは密度，Gは剛性率，νはポアソン比とする。

なお平面応力問題と考えるとνは上述のようにポアソン比であるが，z一方向に無限に拡がっている2次元問題と考えるならば平面歪問題と考えられ，その時のポアソン比σとνとの関係はよく知られているように

$$\nu=\frac{\sigma}{1-\sigma}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot 4)$$

さて回転ω（円周波数と混同しない事）

肺手術一周年記念　　1982. 7. 28

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot5)$$

を導入すれば(1・1)に代入して

$$\left.\begin{aligned}(\triangle + K^2)\,\gamma &= 0\\(\triangle + k^2)\,\omega &= 0\end{aligned}\right\} \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot6)$$

$$K^2 = \frac{1-\nu}{2}\,k^2 \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot7)$$

となって共にヘルムホルツの方程式を満たし，この解はよく知られている。

そこでγとωがわかっているとすると変位は(1・1)，(1・2)，(1・5)から

$$\left.\begin{aligned}u_1 &= -\frac{1}{K^2}\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{1}{k^2}\frac{\partial \omega}{\partial y} \quad ,\\u_2 &= -\frac{1}{K^2}\frac{\partial \gamma}{\partial y} - \frac{1}{k^2}\frac{\partial \omega}{\partial x} \quad ,\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot8)$$

また応力成分は

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= 2G\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\nu}{1-\nu}\gamma\right) \quad ,\\\sigma_y &= 2G\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\nu}{1-\nu}\gamma\right) \quad ,\\\tau_{xy} &= G\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\right) \quad ,\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot9)$$

で与えられるから境界Cに沿って働く力のx，y成分t_1，t_2は,

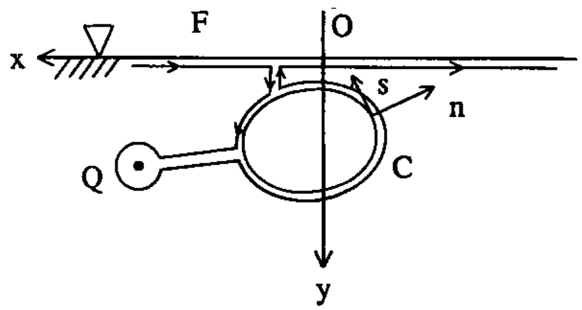
$$\frac{t_1}{G} \equiv \tau_1 = \frac{1}{G}\left(\sigma_x\frac{\partial y}{\partial s} - \tau_{xy}\frac{\partial x}{\partial s}\right) = -2\frac{\partial u_2}{\partial s} - \omega\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{2\gamma}{1-\nu}\frac{\partial x}{\partial n} \quad ,$$

$$\cdots\cdots (1\cdot10)$$

$$\frac{t_2}{G} \equiv \tau_2 = \frac{1}{G}\left(\tau_{xy}\frac{\partial y}{\partial s} - \sigma_y\frac{\partial x}{\partial s}\right) = 2\frac{\partial u_1}{\partial s} + \omega\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{2\gamma}{1-\nu}\frac{\partial y}{\partial n} \quad ,$$

座標系は右図の x 軸が自由表面に一致するようにとるものとする。

特に自由表面の条件は上式から



$$2\frac{\partial u_2}{\partial x}-\omega=0 \ ,$$

$$-2\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{2}{1-\nu}\gamma=0 \ ,$$

となるから (1・2)，(1・5) を代入すれば変位に対しては

$$\left.\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\right|_{y=0}=0 \quad ,$$

$$\left.\nu\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial y}\right|_{y=0}=0 \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot 11)$$

γ と ω に対しては (1・8) を代入して

$$\left.\begin{aligned} \frac{2}{K^2}\frac{\partial^2\gamma}{\partial x\partial y}+\frac{2}{k^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}+\omega&=0\\ -\frac{2}{k^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}+\frac{2}{K^2}\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}+\frac{k^2}{K^2}\gamma&=0 \end{aligned}\right\} \text{for} \quad y=0\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot 12)$$

境界値問題は次の3種類が考えられる。

i）放射問題　C が与えられたモードで振動して波を放射する問題で C 上の変位が与えられる。

ii）散乱問題　与えられた入射波に対して C が波を散乱する場合であるが，今の場合まず入射波に問題がある。

と言うのは無限領域では入射波として平面波を考えればよいが，自由表面がある場合は充分遠方まで伝播する平面波はレーリー波のみである。

しかし実用上の問題を考えると，縦波，横波も考えに入れるべきだと考えられ，それを考慮するためには震源を物体から有限の距離におかねばならない。

しかし震源の局部的攪乱を考えたのでは問題が複雑になりすぎるし，またそれ自身よくわからないので以下ではそのような局部的攪乱は考えている物体まで届かないで波だけが届くものとする。これは震源が極く近くになければ充分許されるであろう。

次に C 上の境界条件は変位が0とする。実際には C が振動する訳であるが，その振動によって波を放射するのであるから，その分はi)の放射問題として取扱う。

Cの振動変位はこのような散乱問題から得られるC上の強制力，放射問題から得られる抗力とCの内部の力学的性質によってきまる反力とを等置してつまり運動方程式を解いて始めて求められる。

iii) 空孔問題　Cの内部が空孔である時は上述の場合の特殊な極限でCの内部からの反力はないから，波による強制力と放射による抗力を等置すればよい。つまりC上で力が0となるようにすればよいけれども，この場合は普通行われるように最初からその条件で境界値問題を解けば簡単であるのは言う迄もあるまい。

2. 縦波，横波の表現と変位

γ，ωはヘルムホルツ方程式の解であるから附録Aのような関数を導入し，$Q\equiv(x',y')$点を図1のようにCと自由表面Fで囲まれた領域D内の点としてグリーンの定理を適用すればよく知られているように次のような表現が出来る。

$$\gamma(Q)=\int_C\left[\gamma(P)\frac{\partial}{\partial n}L(P,Q)-\frac{\partial\gamma}{\partial n_P}L(P,Q)\right]ds_P$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\left[\gamma(P)\frac{\partial L(P,Q)}{\partial y}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}L(P,Q)\right]_{y=0}(-dx)\quad,\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot1)$$

$$\omega(Q)=\int_C\left[\omega\frac{\partial M(P,Q)}{\partial n}-\frac{\partial\omega}{\partial n}M(P,Q)\right]ds_P$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\left[\omega\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial\omega}{\partial n}M(P,Q)\right]_{y=0}dx\quad,\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot2)$$

F上では，(1・12)，(A・3)の関係があるのでこれを代入し部分積分すると(2・1)右辺第2項では，

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\left(\gamma\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}L\right)dx=-\left(\frac{K}{k}\right)^4\int_{-\infty}^{\infty}\left[\omega\frac{\partial N}{\partial y}-\frac{\partial\omega}{\partial y}N\right]dx\quad.$$

となるがNは領域内で正則であるから，これをC上の積分に変更すれば　線の方向に留意して

$$\gamma(Q)=\int_C\left[\gamma\frac{\partial}{\partial n}L(P,Q)-\frac{\partial\gamma}{\partial n}L(P,Q)\right]ds(P)$$

$$+\left(\frac{K}{k}\right)^4\int_C\left[\omega(P)\frac{\partial}{\partial n}N(P,Q)-\frac{\partial\omega}{\partial n}N(P,Q)\right]ds(P)\quad,\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot3)$$

又同様にして

$$\omega(Q)=\int_C [\,\omega\frac{\partial}{\partial n}M(P,Q)-\frac{\partial\omega}{\partial n}M(P,Q)\,]\,ds(P)$$

$$+\left(\frac{k}{K}\right)^4\int_C [\,\tau(P)\frac{\partial}{\partial n}O(P,Q)-\frac{\partial\tau}{\partial n}O(P,Q)\,]\,ds\ , \qquad\cdots\cdots\cdots\ (2\cdot4)$$

あるいは (A・13) の関係を使えば，

$$\tau(Q)=\int_C [\,\tau\frac{\partial}{\partial n}-\frac{\partial\tau}{\partial n}\,]\,L(P,Q)\,ds_P$$

$$+\int_C [\,\omega\frac{\partial}{\partial n}-\frac{\partial\omega}{\partial n}\,]\,O(Q,P)\,ds_P\ , \qquad\cdots\cdots\cdots\ (2\cdot3')$$

$$\omega(Q)=\int_C [\,\omega\frac{\partial}{\partial n}-\frac{\partial\omega}{\partial n}\,]\,M(P,Q)\,ds_P$$

$$+\int_C [\,\tau\frac{\partial}{\partial n}-\frac{\partial\omega}{\partial n}\,]\,N(Q,P)\,ds_P\ , \qquad\cdots\cdots\cdots\ (2\cdot4')$$

となる。

(1・2)，(1・5)，(1・8) を使って上の表現を u_1，u_2，τ_1，τ_2 の C 上値で表わす事を考える。

上式にそれらを代入し部分積分すると，例えば

$$\int_C \left(\tau\frac{\partial L}{\partial n}-\frac{\partial\tau}{\partial n}L\right)ds$$

$$=\frac{K^2}{k^2}\int_C \Big[\,\tau_1\frac{\partial L}{\partial x}+\tau_2\frac{\partial L}{\partial y}+u_1\left(2\frac{\partial^2 L}{\partial s\partial y}+k^2L\frac{\partial x}{\partial n}\right)$$

$$+u_2\left(-2\frac{\partial^2 L}{\partial s\partial x}+k^2L\frac{\partial y}{\partial n}\right)\Big]\,ds\ ,$$

$$\int_C \left(\omega\frac{\partial M}{\partial n}-\frac{\partial\omega}{\partial n}M\right)ds$$

$$=\int_C \Big[-\tau_1\frac{\partial M}{\partial y}+\tau_2\frac{\partial M}{\partial x}+u_1\left(2\frac{\partial^2 M}{\partial s\partial x}-k^2M\frac{\partial y}{\partial n}\right)$$

$$+ \ u_2 \left(2 \frac{\partial^2 M}{\partial s \partial y} + k^2 M \frac{\partial x}{\partial n} \right) \Big] ds \quad ,$$

となるので，

$$r(Q) = \frac{K^2}{k^2} \int_C \Big[\tau_1 \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial N}{\partial y} \right) + \tau_2 \left(\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial N}{\partial x} \right)$$

$$+ u_1 \Big\{ 2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial N}{\partial x} \right) + k^2 \left(L \frac{\partial x}{\partial n} - \frac{K^2}{k^2} N \frac{\partial y}{\partial n} \right) \Big\}$$

$$+ u_2 \Big\{ 2 \frac{\partial}{\partial s} \left(- \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial N}{\partial y} \right) + k^2 \left(L \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{K^2}{k^2} N \frac{\partial x}{\partial n} \right) \Big\} \Big] ds \quad ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2 \cdot 5)$$

$$\omega(Q) = \int_C \Big[\tau_1 \left(- \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial x} \right) + \tau_2 \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial y} \right)$$

$$+ u_1 \Big\{ 2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial y} \right) - k^2 \left(M \frac{\partial y}{\partial n} + \frac{k^2}{K^2} O \frac{\partial x}{\partial n} \right) \Big\}$$

$$+ u_2 \Big\{ 2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial x} \right) + k^2 \left(M \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{k^2}{K^2} O \frac{\partial y}{\partial n} \right) \Big\} \Big] ds \quad ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2 \cdot 6)$$

これを (1・8) に代入すると変位の表現を得る。

それを

$$u_j(Q) = \int_C \big[u_1 \ \tau_{1j}(P, Q) + u_2 \ \tau_{2j}(P, Q)$$

$$- \tau_1(P) \ u_{1j}(P, Q) - \tau_2 \ u_{2j}(P, Q) \big] ds(P) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2 \cdot 7)$$

と書く事にすると

$$u_{11}(P, Q) = \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial N}{\partial y} \right) + \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial x} \right)$$

$$u_{12}(P, Q) = \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{K^2}{k^2} \frac{\partial N}{\partial y} \right) - \frac{1}{k^2} \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{k^2}{K^2} \frac{\partial O}{\partial x} \right)$$

$$u_{21}(P,Q)=\frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial L}{\partial y}+\frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial x}\right)-\frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial y}\right)$$

$$u_{22}(P,Q)=\frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial L}{\partial y}+\frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial x}\right)+\frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial y}\right) \quad ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot 8)$$

$$\tau_{11}(P,Q)=-\frac{1}{k^2}\left\{2\frac{\partial^2}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial L}{\partial y}+\frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial x}\right)+k^2\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{K^2}{k^2}\frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial N}{\partial x'}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{k^2}\left\{2\frac{\partial^2}{\partial s\partial y'}\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial y}\right)-k^2\left(\frac{\partial M}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial y'}\frac{\partial x}{\partial n}\right)\right\} \quad ,$$

$$\tau_{12}(P,Q)=-\frac{1}{k^2}\left\{2\frac{\partial^2}{\partial s\partial y'}\left(\frac{\partial L}{\partial y}+\frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial x}\right)+k^2\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\}$$

$$-\frac{1}{k^2}\left\{2\frac{\partial^2}{\partial s\partial x'}\left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial y}\right)-k^2\left(\frac{\partial M}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial x'}\frac{\partial x}{\partial n}\right)\right\} \quad ,$$

$$\tau_{21}(P,Q)=-\frac{1}{k^2}\left\{-2\frac{\partial^2}{\partial s\partial x'}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial y}\right)+k^2\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial x'}\frac{\partial x}{\partial n}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{k^2}\left\{2\frac{\partial^2}{\partial s\partial y'}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial x}\right)+k^2\left(\frac{\partial M}{\partial y'}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\} \quad ,$$

$$\tau_{22}(P,Q)=-\frac{1}{k^2}\left\{-2\frac{\partial^2}{\partial s\partial y'}\left(\frac{\partial L}{\partial x}-\frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial y}\right)+k^2\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial y'}\frac{\partial x}{\partial n}\right)\right\}$$

$$-\frac{1}{k^2}\left\{2\frac{\partial^2}{\partial s\partial y'}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial x}\right)+k^2\left(\frac{\partial M}{\partial x'}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial x'}\frac{\partial y}{\partial n}\right)\right\} \quad ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot 9)$$

P点がF上にあれば

$$\tau_{ij}(P,Q)\Big|_{y=0}=0 \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot 10)$$

また (1・11) の条件を満たす関係がある。

$$P \quad \text{on} \quad F \quad (y=0)$$

$$\tau_{11}=\frac{2}{k^2}\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial x'}\left(L_y+\frac{K^2}{k^2}\ N_x\right)+\frac{K^2}{k^2}\ N_{x'}-\frac{2}{k^2}\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y'}\left(M_x+\frac{k^2}{K^2}\ O_y\right)-M_{y'}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{2}{k^2}\ L_{xy}+\frac{2K^2}{k^2}N_{xx}+\frac{K^2}{k^2}\ N\right]-\frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{2}{k^2}\ M_{xx}+M+\frac{2}{K^2}\ O_{xy}\right]\ =\ 0$$

$$\tau_{12}=+\frac{1}{k^2}\ \left[2\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y'}\left(L_y+\frac{K^2}{k^2}\ N_x\right)+K^2 N_{y'}\right]$$

$$+\frac{1}{k^2}\ \left[+2\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial x'}\left(M_x+\frac{k^2}{K^2}\ O_y\right)+\ k^2\ M_{x'}\ \right]$$

$$=\frac{2}{k^2}\ \frac{\partial}{\partial y'}\left[L_{xy}+\frac{K^2}{k^2}\ N_{xx}+\frac{K^2}{2}N\right]+\frac{2}{k^2}\ \frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{k^2}{K^2}O_{xy}+M_{xx}+\frac{k^2}{2}\ M\right]=0$$

$$\tau_{21}=\ -\frac{2}{k^2}\ \frac{\partial}{\partial x'}\left[L_{xx}-\frac{K^2}{k^2}\ N_{xy}+\frac{k^2}{2}\ L\right]+\frac{2}{k^2}\ \frac{\partial}{\partial y'}\left[-M_{xy}+\frac{k^2}{K^2}\ O_{xx}+\frac{k^4}{2K^2}O\right]=\ 0$$

$$\tau_{22}=\ -\frac{2}{k^2}\ \frac{\partial}{\partial y'}\left[L_{xx}-\frac{K^2}{k^2}\ N_{xy}+\frac{k^2}{2}\ L\right]-\frac{2}{k^2}\ \frac{\partial}{\partial x'}\left[-M_{xy}+\frac{k^2}{K^2}\ O_{xx}+\ \frac{k^4}{2K^2}\ O\right]=\ 0\ .$$

$$\left.\begin{aligned} u_{ij}\ &=\ u_{ij}^{(0)}+\ u_{ij}' \\ \tau_{ij}\ &=\ \tau_{ij}^{(0)}+\ \tau_{ij}' \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot 11)$$

とおいて肩符(0)のついたものを無限領域の値とする。

即ち

$$\left.\begin{aligned} u_{11}^{(0)}&=\frac{-i}{4k^2}\ \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2}\ H_0^{(2)}(kR)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ H_0^{(2)}(KR)\right]\ , \\ u_{12}^{(0)}=u_{21}^{(0)}&=\frac{i}{4k^2}\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\ \left[H_0^{(2)}(kR)\ -\ H_0^{(2)}(KR)\right]\ , \\ u_{22}^{(0)}&=-\ \frac{i}{4k^2}\ \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ H_0^{(2)}(kR)\ +\frac{\partial^2}{\partial y^2}\ H_0^{(2)}(KR)\right]\ , \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot 12)$$

$$\tau_{11}^{(0)} = \frac{i}{4} \left[\frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(KR) \right]$$

$$- \frac{i}{2k^2} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial y} \left[H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR) \right] ,$$

$$\tau_{12}^{(0)} = -\frac{i}{4} \left[\frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(KR) \right]$$

$$- \frac{i}{2k^2} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} H_0^{(2)}(KR) \right] ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (2\cdot13)$$

$$\tau_{21}^{(0)} = \frac{i}{4} \left[+ \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(KR) \right]$$

$$+ \frac{i}{2k^2} \frac{\partial}{\partial s} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} H_0^{(2)}(KR) \right] ,$$

$$\tau_{22}^{(0)} = \frac{i}{4} \left[\frac{\partial x}{\partial n} \frac{\partial}{\partial x} H_0^{(2)}(kR) + \frac{\partial y}{\partial n} \frac{\partial}{\partial y} H_0^{(2)}(KR) \right]$$

$$+ \frac{1}{2k^2} \frac{\partial^3}{\partial s \partial x \partial y} \left[H_0^{(2)}(kR) - H_0^{(2)}(KR) \right] ,$$

3. 境界積分方程式について

境界値問題を解くには境界上で (2・7) を積分方程式と見立てゝ解けばよい。
しかし，その為には (2・8)，(2・9) の 8 つの核関数の計算が必要である。
これを簡略化するには C の内部で正則な $u_j^{(in)}$，$\tau_j^{(in)}$ を考えて，

$$\sum_i \int_C \left(u_i^{(in)} \tau_{ij} - \tau_i^{(in)} u_{ij} \right) ds = 0 , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3\cdot1)$$

となるから，例えば

$$\left. \begin{aligned} \tau_j^{(in)} + \tau_j &= 0 \quad \text{on } C , \\ u_j^{(in)} + u_j &= U_j \quad \text{on } C , \end{aligned} \right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (3\cdot2)$$

とすると

$$u_j(Q) = \sum_i \int_C U_i \ \tau_{ij}(P,Q)\,ds_P \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot3)$$

又,

$$\left.\begin{aligned} u_j^{(in)} + u_j &= 0 \\ \tau_j^{(in)} + \tau_j &= T_j \end{aligned}\right\} \text{ on } C \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot4)$$

とすると

$$u_j(Q) = -\sum_i \int T_i \ u_{ij}(P,Q)\,ds_P \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot5)$$

(3・3) を利用する時は, C 上では始めから (3・2) によって τ_j が与えられているから, (3・3) から u_j がわかれば C 上の τ と u がわかる事になる。

なお, B.I.E.としては (3・3) に (3・2) を代入して,

$$U_j(Q) - u_j^{(in)}(Q) = \sum_i \int_C U_i \ \tau_{ij}(P,Q)\,ds(P) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot6)$$

として計算する。

一方 (3・5) による時は, T_j が求まっても τ_j は未だわからないから (3・5) に (1・10) の演算をして τ_j を求めなければならない。

今, それを求めて見よう。

$$\left.\begin{aligned} \gamma_j(P,Q) &= \frac{\partial u_{j1}}{\partial x'} + \frac{\partial u_{j2}}{\partial y'} \\ \omega_j(P,Q) &= \frac{\partial u_{j2}}{\partial x'} - \frac{\partial u_{j1}}{\partial y'} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot7)$$

$$\left.\begin{aligned} \tau'_{j_1} &= -\omega_j \frac{\partial y'}{\partial n'} + \frac{k^2}{K^2}\gamma_j \frac{\partial x'}{\partial n'} - 2\frac{\partial u_{j2}}{\partial s'} \\ \tau'_{j_2} &= \omega_j \frac{\partial x'}{\partial n'} + \frac{2}{K^2}\gamma_j \frac{\partial y'}{\partial n'} + 2\frac{\partial u_{j1}}{\partial s'} \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot8)$$

(2・8) からまず,

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 &= -\frac{K^2}{k^2}\left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial y}\right) \\ \gamma_2 &= -\frac{K^2}{k^2}\left(\frac{\partial L}{\partial y} + \frac{K^2}{k^2}\frac{\partial N}{\partial y}\right) \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot9)$$

$$\left.\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial x} \quad , \\ \omega_2 &= -\left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{k^2}{K^2}\frac{\partial O}{\partial y}\right) \quad ,\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \ (3\cdot10)$$

これは (2・5)，(2・6) に一致する。

$$\tau_{11}' = -\omega_1\frac{\partial y'}{\partial n'} + \frac{k^2}{K^2}\ \gamma_1\frac{\partial x'}{\partial n'} - 2\frac{\partial\ u_{12}}{\partial s'}$$

$$= -\frac{\partial y'}{\partial n'}\left(M_y - \frac{k^2}{K^2}\ O_x\right) - \frac{\partial x'}{\partial n'}\left(L_x - \frac{K^2}{k^2}\ N_y\right)$$

$$-\frac{2}{k^2}\ \frac{\partial}{\partial s'}\left[\frac{\partial}{\partial y'}\left(L_x - \frac{K^2}{k^2}\ N_y\right) - \frac{\partial}{\partial x'}\left(M_y - \frac{k^2}{K^2}\ O_x\right)\right]$$

$$\tau_{12}' = \frac{\partial x'}{\partial n'}\left(M_y - \frac{k^2}{K^2}\ O_x\right) - \frac{2}{k^2}\frac{\partial y'}{\partial n'}\left(L_x - \frac{K^2}{k^2}\ N_y\right)$$

$$+\frac{2}{k^2}\ \frac{\partial}{\partial s'}\left[\frac{\partial}{\partial x'}\left(L_x - \frac{K^2}{k^2}\ N_y\right) + \frac{\partial}{\partial y'}\left(M_y - \frac{k^2}{K^2}\ O_x\right)\right] \qquad \cdots\ (3\cdot11)$$

$$\tau_{21}' = \frac{\partial y'}{\partial n'}\left(M_x + \frac{k^2}{K^2}\ O_y\right) - \frac{\partial x'}{\partial n'}\left(L_y + \frac{K^2}{k^2}\ N_x\right)$$

$$-\frac{2}{k^2}\ \frac{\partial}{\partial s'}\left[\frac{\partial}{\partial y'}\left(L_y + \frac{K^2}{k^2}\ N_x\right) + \frac{\partial}{\partial x'}\left(M_x + \frac{k^2}{K^2}\ O_y\right)\right]$$

$$\tau_{22}' = -\frac{\partial x'}{\partial n'}\left(M_x + \frac{k^2}{K^2}\ O_y\right) - \frac{2}{k^2}\left(L_y + \frac{K^2}{k^2}\ N_x\right)$$

$$+\frac{2}{k^2}\ \frac{\partial}{\partial s'}\left[\frac{\partial}{\partial x'}\left(L_y + \frac{K^2}{k^2}\ N_x\right) - \frac{\partial}{\partial y'}\left(M_y + \frac{k^2}{K^2}\ O_y\right)\right]$$

結局

$$\tau_{ij}'(P, Q) = \tau_{ij}(Q, P) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \ (3\cdot12)$$

となるので，この場合は始めから (2・7) を解くのと手間は変らない事になる。

しかし，特にCが自由表面の一部である時は（2・10）によって

$$u_j(Q) = -\sum_i \int_{-1}^{1} \tau_i \; u_{ij}(x, Q)\, dx \;, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot13)$$

となり，これを与えられた u_j について解いて直接 τ_j が求められる。

次頁以下にその積分表示を示す。

$$u_{11} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \cos p(x-x')\,dp\,\Big[\frac{p^2}{k^2}\Big\{-\frac{e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y'-y)}}{\sqrt{p^2-K^2}} + \underset{A}{e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y+y')}}\Big\}$$

$$-\frac{K^2}{k^4}\,p\sqrt{p^2-k^2}\;\underset{C}{e^{-\sqrt{p^2-K^2}y'-\sqrt{p^2-k^2}y}} + \frac{p^2-k^2}{k^2}\Big\{\frac{e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y'-y)}}{\sqrt{p^2-k^2}} + \underset{B}{e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y+y')}}\Big\}$$

$$+\frac{p}{K^2}\sqrt{p^2-k^2}\;\underset{D}{e^{-\sqrt{p^2-k^2}\,y'-\sqrt{p^2-K^2}\,y}}\Big]\;.$$

$$u_{12} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \sin p(x-x')\,dp\;\;\frac{p}{k^2}\sqrt{p^2-K^2}\Big\{-\frac{e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y'-y)}}{\sqrt{p^2-K^2}} + \underset{A}{e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y+y')}}\Big\}$$

$$+\frac{p}{k^2}\sqrt{p^2-k^2}\Big\{\frac{e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y'-y)}}{\sqrt{p^2-k^2}} + \underset{B}{e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y+y')}}\Big\}$$

$$-\frac{K^2}{k^4}\sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-K^2}\;\underset{C}{e^{-\sqrt{p^2-K^2}y'-\sqrt{p^2-k^2}y}} + \frac{p^2}{K^2}\;\underset{D}{e^{-\sqrt{p^2-k^2}\,y'-\sqrt{p^2-K^2}\,y}}\Big]$$

$$u_{21} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \sin p(x-x')\,dp\Big[-\frac{p}{k^2}\sqrt{p^2-K^2}\;\Big\{e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y'-y)} + \underset{A}{e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y'+y)}}\Big\}$$

$$-\frac{p}{k^2}\sqrt{p^2-k^2}\;\Big\{-\frac{e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y'-y)}}{\sqrt{p^2-k^2}} + \underset{B}{e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y'+y)}}\Big\}$$

$$+\frac{K^2}{k^4}\,p^2\;\underset{C}{e^{-\sqrt{p^2-K^2}y'-\sqrt{p^2-k^2}\,y}} - \frac{1}{K^2}\sqrt{p^2-K^2}\sqrt{p^2-k^2}\;\underset{D}{e^{-\sqrt{p^2-k^2}\,y'-\sqrt{p^2-K^2}\,y}}\Big]$$

$$u_{22}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \cos p(x-x')\,dp\Big[\frac{p^2-K^2}{k^2}\Big\{\frac{e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y'-y)}}{\sqrt{p^2-K^2}}+e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y'+y)}A\Big\}$$

$$+\frac{p^2}{k^2}\Big\{-\frac{e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y'-y)}}{\sqrt{p^2-k^2}}+e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y+y')}B\Big\}$$

$$-\frac{K^2}{k^4}\,p\sqrt{p^2-K^2}\,e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,y'-\sqrt{p^2-k^2}\,y}C+\frac{p}{K^2}\sqrt{p^2-K^2}\,e^{-\sqrt{p^2-k^2}\,y'-\sqrt{p^2-K^2}\,y}D\Big],$$

$y=0$ では

$$u_{11}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos p(x-x')dp}{k^2\triangle}\Big[\Big\{p^4\sqrt{p^2-k^2}+p^2\sqrt{p^2-k^2}\Big(\frac{k^2}{2}-p^2\Big)\Big\}e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,y'}$$

$$+\sqrt{p^2-k^2}\Big\{\Big(\frac{k^2}{2}-p^2\Big)^2+p^2\Big(\frac{k^2}{2}-p^2\Big)\Big\}e^{-\sqrt{p^2-k^2}\,y'}\Big]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{\cos p(x-x')\,dp}{\triangle}\sqrt{p^2-k^2}\Big[p^2e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,y'}+\Big(\frac{k^2}{2}-p^2\Big)e^{-\sqrt{p^2-k^2}\,y'}\Big]$$

$$u_{12}=\frac{1}{\pi k^2}\int_0^\infty\frac{\sin p(x-x')}{\triangle}dp\Big[\Big\{p^3\sqrt{p^2-K^2}\sqrt{p^2-k^2}+p\sqrt{p^2-K^2}\sqrt{p^2-k^2}\Big(\frac{k^2}{2}-p^2\Big)e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,y'}$$

$$+\Big\{p\Big(\frac{k^2}{2}-p^2\Big)^2+p^3\Big(\frac{k^2}{2}-p^2\Big)\Big\}e^{-\sqrt{p^2-k^2}\,y'}\Big]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{\sin p(x-x')}{\triangle}dp\cdot p\Big[\sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-K^2}\,e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,y'}+\Big(\frac{k^2}{2}-p^2\Big)e^{-\sqrt{p^2-k^2}\,y'}\Big]$$

$$u_{21}=\frac{1}{\pi k^2}\int_0^\infty\frac{\sin p(x-x')}{\triangle}dp\cdot p\Big[\Big\{-\Big(\frac{k^2}{2}-p^2\Big)^2-k^2\Big(\frac{k^2}{2}-p^2\Big)\Big\}e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,y'}$$

$$-\Big\{p^2\sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-K^2}+\Big(\frac{k^2}{2}-p^2\Big)\sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-K^2}\Big\}e^{-\sqrt{p^2-k^2}\,y'}\Big]$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{\sin p(x-x')}{\triangle}dp\cdot p\Big[\Big(\frac{k^2}{2}-p^2\Big)e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,y'}+\sqrt{p^2-K^2}\sqrt{p^2-k^2}\,e^{-\sqrt{p^2-k^2}\,y'}\Big]$$

$$u_{22}=\frac{1}{\pi k^2}\int_0^\infty\frac{\cos p(x-x')}{\triangle}dp\sqrt{p^2-K^2}\left[\left\{\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2+p^2\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\right\}e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,y'}\right.$$

$$\left.+\left\{p^4+p^2\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\right\}e^{-\sqrt{p^2-k^2}\,y'}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\frac{\cos p(x-x')}{\triangle}dp\sqrt{p^2-K^2}\left[\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,y'}+p^2e^{-\sqrt{p^2-k^2}\,y'}\right] //$$

$y=y'=0$ では

$$u_{11}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\cos p(x-x')\,dp\left[\frac{p^2}{k^2}\frac{2p\sqrt{p^2-k^2}}{\triangle}+\frac{\sqrt{(p^2-k^2)}}{k^2}\frac{2\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2}{\triangle}\right.$$

$$\left.+4p^2\sqrt{p^2-k^2}\frac{\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)}{k^2\triangle}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi k^2}\int_0^\infty\frac{\cos p(x-x')}{\triangle}dp\sqrt{p^2-k^2}\left[p^4+\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2+2p^2\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\right]$$

$$=\frac{k^2}{4\pi}\int_0^\infty\frac{\cos p(x-x')}{\triangle}\sqrt{p^2-k^2}\,dp //$$

$$u_{12}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\sin p(x-x')\,dp\left[\frac{p}{k^2}\sqrt{p^2-K^2}\frac{2p^2\sqrt{p^2-k^2}}{\triangle}+\frac{p}{k^2}\frac{2\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2}{\triangle}\right.$$

$$\left.+\frac{2p^3\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)}{k^2\triangle}+2\frac{p}{k^2\triangle}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-K^2}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi k^2}\int_0^\infty\frac{\sin p(x-x')}{\triangle}dp\;p\left[p^2\sqrt{p^2-K^2}\sqrt{p^2-k^2}+\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2\right.$$

$$\left.+\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\sqrt{p^2-K^2}\sqrt{p^2-k^2}+p^2\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\sin p(x-x')\frac{dp}{\triangle}p\left[\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)+\sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-K^2}\right] //$$

$$u_{21}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \sin p(x-x')\,dp\Big[-\frac{2p}{k^2\triangle}\Big(\frac{k^2}{2}-p^2\Big)^2-\frac{2p^3\sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-K^2}}{k^2\triangle}$$

$$-\frac{2p^3}{k^2\triangle}\Big(\frac{k^2}{2}-p^2\Big)-\frac{2p}{k^2\triangle}\Big(\frac{k^2}{2}-p^2\Big)\sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-K^2}\Big]$$

$$=\frac{-1}{\pi k^2}\int_0^\infty \sin p(x-x')\,dp\cdot p\cdot\Big[\Big(\frac{k^2}{2}-p^2\Big)^2+p^2\sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-K^2}$$

$$+p^2\Big(\frac{k^2}{2}-p^2\Big)+\Big(\frac{k^2}{2}-p^2\Big)\sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-K^2}\Big]=-u_{12}\ /\!/$$

$$u_{22}=\frac{1}{\pi k^2}\int_0^\infty\frac{\cos p(x-x')dp}{\triangle}\sqrt{p^2-K^2}\Big[\Big(\frac{k^2}{2}-p^2\Big)^2+p^4+2p^2\Big(\frac{k^2}{2}-p^2\Big)\Big]$$

$$=\frac{k^2}{4\pi}\int_0^\infty\frac{\cos p(x-x')\,dp\sqrt{p^2-K^2}}{\triangle}\quad /\!/$$

これらの式において $k, K\rightarrow 0$ の時は静的弾性論の値に一致しなければならない。

その時，前頁の積分の値は被積分関数の $p\gg 1$ の値で大体決まると考えられ $\triangle\rightarrow\frac{1+\nu}{4}k^2p^2$ であり，また

$$\int_0^\infty e^{-py+ipx}dp=\frac{i}{x+iy}$$

を積分して

$$\int_0^\infty\frac{e^{-py}}{p}(\cos px-1)\,dp=-\log|x-iy|$$

$$\int_0^\infty\frac{e^{-py}}{p}\sin px\,dp=-\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

であるから，$y=y'=0$ においては

$$u_{11} \longrightarrow \frac{-1}{\pi(1+\nu)} \log |x|$$

$$u_{12} = -u_{21} \longrightarrow \frac{-(\frac{K}{k})^2}{(1+\nu)\pi} x \begin{cases} 0 & \text{for} \quad x > x' \\ \pi & \text{for} \quad x < x' \end{cases}$$

$$u_{22} \longrightarrow \frac{-1}{\pi(1+\nu)} \log |x| ,$$

これは，$k \to 0$ の極限に一致する。

静的弾性論の極限値

$y = 0$，$\theta' = -\theta$，$R = R'$ とおくと，

$$u_{11} = \frac{2}{\pi} \log R - \frac{1+\nu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x'} (2y'\theta) = \frac{2}{\pi} \log R + \frac{1+\nu}{2\pi} \frac{2y'^2}{R^2}$$

$$u_{12} = +\frac{2}{\pi}\theta - \frac{1+\nu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y'} \{ (x-x') \log \frac{R}{R'} + y'(\theta - \theta') \}$$

$$u_{21} = -\frac{2}{\pi}\theta - \frac{1+\nu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x'} (x-x')(2\theta) + \frac{1+\nu}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \{ \frac{1-\nu}{2} (x-x') \log \frac{R}{R'} \}$$

$$u_{22} \bigg|_{y'=0} = \frac{2}{\pi} \log R + \frac{1-\nu^2}{4\pi} (+y') \frac{2y'}{R^2} + \frac{(1+\nu^2)}{2\pi} \frac{[y'^2]}{R^2}$$

$$u_{12} = \frac{2}{\pi}\theta - \frac{1+\nu}{\pi}\theta = \frac{1-\nu}{\pi}\theta$$

$$u_{21} = -\frac{2}{\pi}\theta + \frac{1+\nu}{\pi}\theta + \frac{1+\nu}{\pi}(x-x')\frac{y'}{R^2} - \frac{1+\nu}{\pi}(x-x')\frac{y'}{R^2} = -u_{12}$$

$$u_{22} = \frac{2}{\pi} \log R + \frac{1+\nu}{\pi} \frac{y'^2}{R^2}$$

4. 遠場の表現

附録Aの漸近展開を2節の式に代入すればよいがここでは r，ω の別の表現から求めて見よう。

その為に (2・3)，(2・4) に (A・6)，(A・7) を代入して積分順序を変更し，コッチン関数 G，F を次のように導入すると，

$$
\left.
\begin{aligned}
G(p) &= \int_C \left(\frac{\partial r}{\partial n} - r\frac{\partial}{\partial n}\right) e^{ipx-\sqrt{p^2-K^2}\,y}\,ds \quad ,\\
F(p) &= \int_C \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} - \omega\frac{\partial}{\partial n}\right) e^{ipx-\sqrt{p^2-k^2}\,y}\,ds \quad ,
\end{aligned}
\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4\cdot 1)
$$

こゝに X，Y は C の中心（任意）からの座標とする。

また，

$$
\left.
\begin{aligned}
G^*(p) &= \int_C \left(\frac{\partial r}{\partial n} - r\frac{\partial}{\partial n}\right) e^{ipX+\sqrt{p^2-K^2}\,Y}\,ds \quad ,\\
F^*(p) &= \int_C \left(\frac{\partial \omega}{\partial n} - \omega\frac{\partial}{\partial n}\right) e^{ipX+\sqrt{p^2-k^2}\,Y}\,ds \quad ,
\end{aligned}
\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4\cdot 2)
$$

$$
\begin{aligned}
r(Q) = r_0(Q) &- \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y+y')} A(p)\,dp\cdot\left[e^{-ip(x-x')}G(p) + e^{ip(x'-x)}G(-p)\right]\\
&- \frac{\left(\frac{K}{k}\right)^4}{4\pi i}\int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2-k^2}\,y-\sqrt{p^2-K^2}\,y'} C(p)\,dp\cdot\left[e^{-ip(x'-x)}F(p) - e^{ip(x'-x)}F(-p)\right] ,
\end{aligned}
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots (4\cdot 3)$$

$\sqrt{p^2-k^2}$ の $|p|<k$ の時の値は $\pm i\sqrt{k^2-p^2}$ for $I_m(p) \gtrless 0$

あるいは，$p=k\cos\varphi$ とおくときは $\varphi \gtrless 0$

こうすると F^*，G^* は別にわけて定義することもない。

$$
\begin{aligned}
\omega(Q) = \omega_0(Q) &- \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y+y')} B(p)\,dp\cdot\left[e^{-ip(x'-x)}F(p) + e^{ip(x'-x)}F(-p)\right]\\
&- \frac{\left(\frac{k}{K}\right)^4}{4\pi i}\int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,y-\sqrt{p^2-k^2}\,y'} D(p)\,dp\cdot\left[e^{-ip(x'-x)}G(p) - e^{ip(x'-x)}G(-p)\right] ,
\end{aligned}
$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots (4\cdot 4)$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_0(Q) &= \frac{i}{4}\int_C \left(\gamma\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial\gamma}{\partial n}\right) H_0^{(2)}(KR)\,ds\ , \\ \omega_0(Q) &= \frac{i}{4}\int_C \left(\omega\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial\omega}{\partial n}\right) H_0^{(2)}(kR)\,ds\ , \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4\cdot5)$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_0(Q) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y'-y)}\,dp}{\sqrt{p^2-K^2}}\left[e^{-ip(x'-x)}G^*(p) + e^{ip(x'-x)}G^*(-p)\right] \\ &\qquad \text{for}\quad y'>y\ , \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y-y')}\,dp}{\sqrt{p^2-K^2}}\left[e^{-ip(x'-x)}G(p) + e^{ip(x'-x)}G(-p)\right] \\ &\qquad \text{for}\quad y>y'\ , \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (4\cdot6)$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_0(Q) &= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y'-y)}\,dp}{\sqrt{p^2-k^2}}\left[e^{-ip(x'-x)}F^*(p) + e^{ip(x'-x)}F^*(-p)\right] \\ &\qquad \text{for}\quad y'>y\ , \\ &= \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y-y')}\,dp}{\sqrt{p^2-k^2}}\left[e^{-ip(x'-x)}F(p) + e^{ip(x'-x)}F(-p)\right] \\ &\qquad \text{for}\quad y>y'\ , \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (4\cdot7)$$

こゝに（x, y）はCの中心の座標とする。

これらの表現から附録Aと同様にして漸近展開を得る事が出来るが，それは次の4つの項にわける事が出来る。

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= \gamma_0 + \gamma_K + \gamma_k + \gamma_R\ , \\ \omega &= \omega_0 + \omega_k + \omega_K + \omega_R\ , \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4\cdot8)$$

γ_0, ω_0 は (4・5)～(4・7) であり，γ_K, ω_k は自由表現に関する鏡像による項，γ_k, ω_K は夫々の干渉項，γ_R, ω_R はレーリー波に関する項である。

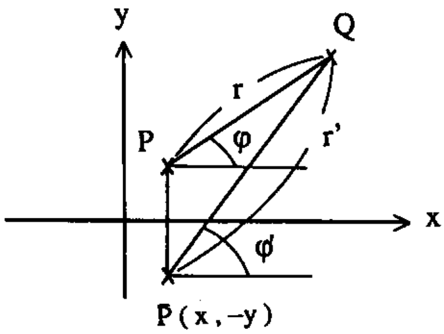
先ず

$$\left.\begin{aligned} \gamma_0(Q) &\to \frac{e^{-iK r}}{2\sqrt{2\pi i K r}}\,G^*(K\cos\varphi)\ , \\ \omega_0(Q) &\to \frac{e^{-ik r}}{2\sqrt{2\pi i k r}}\,F^*(k\cos\varphi)\ , \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4\cdot9)$$

$$\text{for}\quad \pi > \varphi > 0$$

$$r_0(Q) \quad \rightarrow$$

$$\frac{e^{-iKr}}{2\sqrt{2\pi i K r}} G(K\cos\varphi)$$



$$\omega_0(Q) \quad \rightarrow$$

$$\frac{e^{-ikr}}{2\sqrt{2\pi i k r}} F(k\cos\varphi)$$

$$\text{for} \quad -\pi < \varphi < 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4\cdot 9')$$

$$\left.\begin{aligned} r_K(Q) &\rightarrow \frac{-\sqrt{i}\; e^{-iKr'}}{2\sqrt{2\pi K r'}} A(K\cos\varphi')\, K\sin\varphi'\; G(K\cos\varphi') \;, \\ \omega_k(Q) &\rightarrow \frac{-\sqrt{i}\; e^{-ikr'}}{2\sqrt{2\pi k r'}} B(k\cos\varphi')\, k\sin\varphi'\; F(k\cos\varphi') \;, \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(4\cdot 10)$$

次に r_k ，ω_K は y と y' の相対位置によって大変複雑になるが，こゝでは実際上必要な y 又は y' が０に近い次の２つの場合のみ考える。

$$r_k \quad \rightarrow -\operatorname{sgn}(x'-x)\frac{\left(\frac{K}{k}\right)^4 e^{-iK\bar{r}-\sqrt{K^2\cos^2\bar{\varphi}-k^2}\,y}}{2\sqrt{2\pi i K\bar{r}}}\; C(K\cos\bar{\varphi})K\sin\bar{\varphi}\, F(K\cos\bar{\varphi}) \quad ,$$

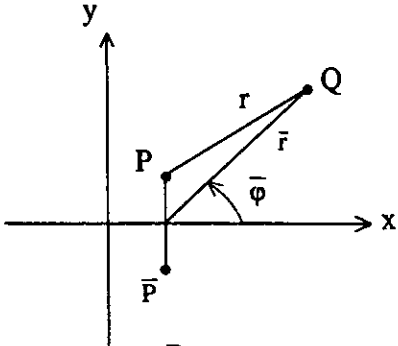
$$\text{for} \quad y' \gg y \doteqdot 0 \;,$$

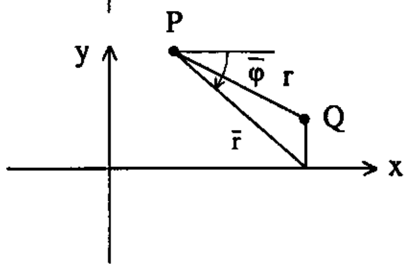
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4\cdot 11)$$

$$r_k \quad \rightarrow -\frac{\left(\frac{K}{k}\right)^4 \operatorname{sgn}(x'-x)\; e^{-ik\bar{r}-\sqrt{k^2\cos^2\bar{\varphi}-K^2}\,y'}}{2\sqrt{2\pi i k\bar{r}}}\; C(k\cos\bar{\varphi})\, k\sin\bar{\varphi}\; F(k\cos\bar{\varphi}) \quad ,$$

$$\text{for} \quad y \gg y' \doteqdot 0 \;,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (4\cdot 11')$$





$$\omega_K = \;\rightarrow -\frac{\left(\frac{k}{K}\right)^4 \operatorname{sgn}(x'-x)}{2\sqrt{2\pi i k\bar{r}}}\, e^{-ik\bar{r}-\sqrt{k^2\cos^2\bar{\varphi}-K^2}\,y}\; D(k\cos\bar{\varphi})\,k\sin\bar{\varphi}\;\; G(k\cos\bar{\varphi}),$$

$$\text{for} \quad y' \gg y \doteqdot 0$$

$$\omega_K \quad \rightarrow -\frac{\left(\frac{k}{K}\right)^4 \operatorname{sgn}(x'-x)}{2\sqrt{2\pi i K\bar{r}}}\, e^{-iK\bar{r}-\sqrt{K^2\cos^2\bar{\varphi}-k^2}\,y'}\; D(k\cos\bar{\varphi})\,K\sin\bar{\varphi}\;\; G(k\cos\bar{\varphi}),$$

$$\text{for} \quad y \gg y' \doteqdot 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4\cdot 12)$$

のようになってこの項は $y' \gtrless y$ で波の性質が変る。

最後にレーリー波に関する部分は留数分で,

$$A'(K_R),\; B',\; C',\; D' = \lim_{p\to\pm K_R} (p-K_R)\,A(p)$$

とすると,

$$\gamma_R \;\to\; \frac{i}{2}\,A'(K_R)\,e^{\mp iK_R(x'-x)-\sqrt{K_R^2-K^2}(y+y')}\,G(\pm K_R)$$

$$\pm\frac{\left(\frac{K}{k}\right)^4}{2}\,C'(K_R)\,e^{\mp iK_R(x'-x)-\sqrt{K_R^2-k^2}-\sqrt{K_R^2-K^2}\,y'}\,F(\pm K_R)\quad,$$

$$\omega_R \;\to\; \frac{i}{2}\,B'(K_R)\,e^{\mp iK_R(x'-x)-\sqrt{K_R^2-k^2}(y+y')}\,F(\pm K_R)\qquad\cdots\cdots(4\cdot13)$$

$$\pm\frac{\left(\frac{k}{K}\right)^4}{2}\,D'(K_R)\,e^{\mp iK_R(x'-x)-\sqrt{K_R^2-K^2}\,y-\sqrt{K_R^2-k^2}\,y'}\,G(\pm K_R)\quad,$$

$$+\ \mathrm{sgn}\ \ \text{for}\ \ x'>x\ ,\quad -\ \mathrm{sgn}\ \ \text{for}\ \ x'<x\ .$$

最も簡単な場合として，まず

$$G(K\cos\varphi)=G^*(K\cos\varphi)=G(k\cos\overline{\varphi})=G(\pm K_R)=G(0)\,,$$
$$F=0\qquad\cdots\cdots(4\cdot14)$$

つまり P 点における無指向性の膨張収縮源を考えると，

$$\gamma_0 \;\to\; \frac{e^{-iKr}}{2\sqrt{2\pi iKr}}\,G(0)\quad,$$

$$\gamma_K \;\to\; -\frac{-\sqrt{i}\,e^{-iKr'}}{2\sqrt{2\pi Kr'}}\,A(K\cos\varphi')K\sin\varphi'\ G(0)\quad,$$

$$\gamma_k \;\to\; 0$$

$$\gamma_R \;\to\; \frac{i}{2}\,A'(K_R)\,e^{\mp iK_R(x'-x)-\sqrt{K_R^2-K^2}(y+y')}\,G(0)\quad,\qquad\cdots(4\cdot15)$$

$$\omega_0 \;\to\; 0\,,\quad \omega_k \;\to\; 0$$

$$\omega_K \underset{y'\fallingdotseq 0}{\to} -\frac{\left(\frac{k}{K}\right)^4\mathrm{sgn}\,(x'-x)\,e^{-iK\overline{r}-\sqrt{K^2\cos^2\overline{\varphi}-k^2}-y'}}{2\sqrt{2\pi iK\overline{r}}}\,D(k\cos\overline{\varphi})K\sin\overline{\varphi}\ G(0)\quad,$$

$$\omega_R \;\to\; \pm\frac{\left(\frac{k}{K}\right)^4}{2}\,D'(K_R)\,e^{\mp iK_R(x'-x)-\sqrt{K_R^2-K^2}\,y-\sqrt{K_R^2-k^2}\,y'}\,G(0)\quad,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4\cdot15)$$

同様にして

$$\left.\begin{aligned} F &= F(0) \quad, \\ G &= 0 \quad, \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4\cdot16)$$

つまり無指向性の剪断振動とすれば，

$$r_0 = r_K = 0$$

$$r_K \underset{y' \doteqdot 0}{\rightarrow} -\frac{\left(\frac{K}{k}\right)^4 \operatorname{sgn}(x'-x)}{2\sqrt{2\pi i k \overline{r}}} e^{-ik\overline{r}-\sqrt{k^2\cos^2\overline{\varphi}-K^2}\,y'} C(k\cos\overline{\varphi})\, k\sin\overline{\varphi}\ F(0) \quad,$$

$$r_R \rightarrow \pm\frac{\left(\frac{K}{k}\right)^4}{2} C'(K_R)\, e^{\mp iK_R(x'-x)-\sqrt{K_R{}^2-k^2}\,y-\sqrt{K_R{}^2-K^2}\,y'} F(0) \quad,$$

$$\omega_0 \rightarrow \frac{e^{-ikr}}{2\sqrt{2\pi i k \overline{r}}} F(0) \quad, \qquad \cdots (4\cdot17)$$

$$\omega_K \rightarrow -\frac{\sqrt{i}\ e^{-ikr'}}{2\sqrt{2\pi k r'}} B(k\cos\varphi')\, k\sin\varphi'\ F(0) \quad,$$

$$\omega_K \rightarrow 0$$

$$\omega_R \rightarrow \frac{i}{2}\ B'(K_R)\, e^{\mp iK_R(x'-x)-\sqrt{K_R{}^2-k^2}(y+y')} F(0) \quad,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4\cdot17)$$

5. イムピーダンス，波の強制力，可逆定理

振動の規準化された変位モードを u_j，その速度振幅を I，とすると，それによる境界力は $GI\,\tau_j / i\omega$ であるから媒質が物体に及ぼす一般力 V は，

$$V = -\frac{GI}{i\omega}\int_C \tau_j\ u_j\ ds \quad, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\cdot1)$$

となる。

それ故，

$$V = I\,Z \quad, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\cdot2)$$

と書いてZをイムピーダンスとすると，

$$Z = i \frac{G}{\omega} \int_C \tau_j \, u_j \, ds \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\cdot 3)$$

次にn番目の変位モードを$u_j^{(n)}$，速度振幅をI_n，規準化境界力を$\tau_j^{(n)}$，m番目のを夫々，$u_j^{(m)}$，$\tau_j^{(m)}$，I_mとすると，

m番号の振動によるn方向の一般力$V_{m,n}$は，

$$V_{m,n} = -\frac{GI_m}{i\omega} \int \tau_j^{(m)} u_j^{(n)} ds = I_m Z_{m,n} \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\cdot 4)$$

$$Z_{m,n} = \frac{iG}{\omega} \int_C \tau_j^{(m)} u_j^{(n)} ds \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\cdot 5)$$

これは相互イムピーダンスである。

こゝでグリーンの定理より明らかに，

$$\int_C \left(\tau_j^{(m)} u_j^{(n)} - \tau_j^{(n)} u_j^{(m)} \right) ds = 0 \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\cdot 6)$$

となるから，

$$Z_{m,n} = Z_{n,m} \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\cdot 7)$$

となり，可逆性が成立する。

次に物体が２つあっても(1・6)は成立つから，今Sを振動源としCに及ぼす力を考えよう。

Sの振動による変位場を$u_j^{(s)}$，境界力を$G\tau_j^{(s)}$としよう。Cはこの波を反射散乱するからそれを$u_j^{(d)}$，$G\tau_j^{(d)}$としよう。

Cに働く一般力は，

$$V_s = -G \int_C \left(\tau_j^{(s)} + \tau_j^{(d)} \right) u_j \, ds \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\cdot 8)$$

所で，

$$\int_C \tau_j^{(d)} u_j \, ds = \int_C \tau_j \, u_j^{(d)} ds \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\cdot 9)$$

であるが，

$$\left. \begin{aligned} u_j^{(d)} &= -u_j^{(s)} \quad \text{on} \quad C \ , \\ u_j &= 0 \quad \text{on} \quad S \ , \end{aligned} \right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\cdot 10)$$

と定義すると，

$$V_s = -G \int_C \left(\tau_j^{(s)} u_j - \tau_j u_j^{(s)} \right) ds , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\cdot11)$$

また (5・6) で積分範囲を C と S とおいたものを使うと，

$$V_s = +G \int_S \left(\tau_j^{(s)} u_j - \tau_j u_j^{(s)} \right) ds , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\cdot12)$$

なる可逆性が成立する。

所で２つの物体が充分離れているとして互の反射等は無視すると前節の漸近展開が成立つから，上式はもっと具体的に書き下せる。

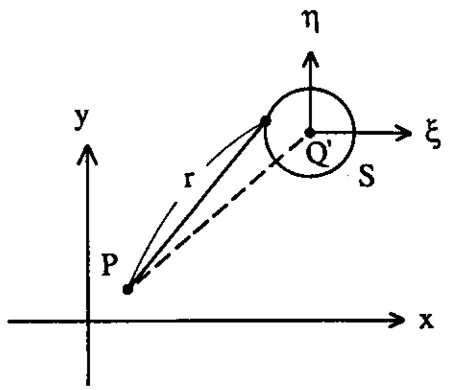
まず (5・12) を１節の式により部分積分して γ，ω に変換すると，

$$V_s = G k^2 \int_S \left[\frac{1}{K^4} \left(\gamma \frac{\partial \gamma^{(s)}}{\partial n} - \gamma^{(s)} \frac{\partial \gamma}{\partial n} \right) + \frac{1}{k^4} \left(\omega \frac{\partial \omega^{(s)}}{\partial n} - \omega^{(s)} \frac{\partial \omega}{\partial n} \right) \right] ds , \qquad \cdots (5\cdot13)$$

又 S の中心を $0'$ とすると，

$r = r_0 + \xi \cos \varphi + \eta \sin \varphi$,

となるので，



$$\left.\begin{aligned} G_s^*(p) &= \int_S \left(\frac{\partial \gamma^{(s)}}{\partial n} - \gamma^{(s)} \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{i p\xi + \sqrt{p^2 - K^2}\,\eta} ds , \\ F_s^*(p) &= \int_S \left(\frac{\partial \omega^{(s)}}{\partial n} - \omega^{(s)} \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{i p\xi + \sqrt{p^2 - k^2}\,\eta} ds , \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\cdot14)$$

とおくと (4・8) に対応して V_s は８項から成る。

$$V_s = k^2\ G\left[\frac{1}{K^4}(v_0+v_K+v_k+v_R)+\frac{1}{k^4}(w_0+w_k+w_K+w_R)\right], \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\cdot 15)$$

$$v_0 = \int_S \left(\frac{\partial \overset{(s)}{r}}{\partial n} - \overset{(s)}{r}\frac{\partial}{\partial n}\right) r_0\ ds = \frac{e^{-iKr}}{2\sqrt{2\pi i K r}}\ G^*(K\cos\varphi)\,G_S^*(K\cos\overline{\varphi+\pi}) \ ,$$

$$v_K = \int_S \left(\frac{\partial \overset{(s)}{r}}{\partial n} - \overset{(s)}{r}\frac{\partial}{\partial n}\right) r_K\ ds = \frac{-\sqrt{i}\ e^{-iKr'}}{2\sqrt{2\pi K r}}\ A(K\cos\varphi')K\sin\varphi'\ G(K\cos\varphi')$$

$$\times\ G_S^*\ (K\cos\overline{\varphi'+\pi}) \ ,$$

$$v_k = \int_S \left(\frac{\partial \overset{(s)}{r}}{\partial n} - \overset{(s)}{r}\frac{\partial}{\partial n}\right) r_k\ ds = -\frac{\left(\frac{K}{k}\right)^4 \operatorname{sgn}(x'-x)}{2\sqrt{2\pi i K r}}\ e^{-ik\bar{r}-\sqrt{K^2\cos^2\bar{\varphi}-k^2}\,y}\ C\,(K\cos\bar{\varphi})\,K\sin\bar{\varphi}$$

$$\times\ F\,(K\cos\bar{\varphi})\ G_S^*\,(K\cos\overline{\bar{\varphi}+\pi}) \ ,$$

$$v_R = \int_S \left(\frac{\partial \overset{(s)}{r}}{\partial n} - \overset{(s)}{r}\frac{\partial}{\partial n}\right) r_R\ ds = \frac{i}{2}\ A'\,(K_R)\ e^{\mp iK_R(x'-x)-\sqrt{K_R^2-k^2}\,y-\sqrt{K_R^2-K^2}\,y'}\ G\,(\pm K_R)\cdot G_S\,(\mp K_R)$$

$$\pm\ \frac{\left(\frac{K}{k}\right)^4}{2}\ C'\,(K_R)\ e^{\mp iK_R(x'-x)-\sqrt{K_R^2-k^2}\,y-\sqrt{K_R^2-K^2}\,y'}\ F\,(\pm K_R)\ G_S\,(\mp K_R) \ ,$$

以上 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5\cdot 16)$

$$w_0 = \int_S \left(\frac{\partial \overset{(s)}{\omega}}{\partial n} - \overset{(s)}{\omega}\frac{\partial}{\partial n}\right) \omega_0\ ds = \frac{e^{-ikr}}{2\sqrt{2\pi i k r}}\ F^*(k\cos\varphi)\,F_S^*\,(k\cos\overline{\varphi+\pi}) \ ,$$

$$w_k = \int_S \left(\frac{\partial \overset{(s)}{\omega}}{\partial n} - \overset{(s)}{\omega}\frac{\partial}{\partial n}\right) \omega_k\ ds = \frac{-\sqrt{i}\ e^{-ikr'}}{2\sqrt{2\pi k r'}}\ B\,(k\cos\varphi')\ k\sin\varphi'\ F(k\cos\varphi')$$

$$\times\ F_S^*\,(k\cos\ \overline{\varphi'+\pi})$$

$$w_K = \int_S \left(\frac{\partial \overset{(s)}{\omega}}{\partial n} - \overset{(s)}{\omega}\frac{\partial}{\partial n}\right) \omega_K\ ds = -\frac{\left(\frac{k}{K}\right)^4 \operatorname{sgn}(x'-x)}{2\sqrt{2\pi i k \bar{r}}}\ e^{-ik\bar{r}-\sqrt{k^2\cos^2\bar{\varphi}-K^2}\,y}\ D\,(k\cos\bar{\varphi})\,k\sin\bar{\varphi}$$

$$\times\ G\,(k\cos\ \bar{\varphi})\ F_S^*\,(k\cos\ \overline{\bar{\varphi}+\pi}) \ ,$$

$$w_R = \frac{i}{2} B'(K_R)\, e^{\mp i K_R (x'-x) - \sqrt{K_R^2 - k^2}(y+y')} F(\pm K_R)\, F_S(\mp K_R)$$

$$\pm \frac{(\frac{k}{K})^4}{2} D'(K_R)\, e^{\mp i K_R (x'-x) - \sqrt{K_R^2 - K^2}\, y - \sqrt{K_R^2 - k^2}\, y'} G(\pm K_R)\, F_S(\mp K_R) \quad ,$$

以上 ……………… (5・17)

なお,

$$G_S(p) = \int_S \left(\frac{\partial \tau^{(s)}}{\partial n} - \tau^{(s)} \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{ip\xi - \sqrt{p^2 - K^2} - \eta} ds \quad ,$$

………(5・14′)

$$F_S(p) = \int_S \left(\frac{\partial \omega^{(s)}}{\partial n} - \omega^{(s)} \frac{\partial}{\partial n} \right) e^{ip\xi - \sqrt{p^2 - k^2}\,\eta} ds \quad ,$$

$y \to 0$ ならば, $r = r' = \overline{r}$, $\varphi = \varphi' = \overline{\varphi}$ となるので大分簡単になり, また前節の (4・14), (4・15) のような場合は v_0 , v_k , v_K , v_R が 0 となる。 又逆に (4・12) , (4・13) の時は $w_0 \sim w_R$ が 0 となる。

これは水波理論におけるハスキントの関係と呼ばれるものの一般的場合である。

r が充分大きければ v_R と w_R だけ残り, よく知られたハスキントの関係である。

$\varphi = \varphi' = \overline{\varphi} \doteqdot 0$ となると, $\begin{pmatrix} F^*(k) = F(k) \\ G^*(K) = G(K) \end{pmatrix}$

$$1 \doteqdot i \;\; A(K \cos\varphi) K \sin\varphi$$

$$1 \doteqdot i \;\; B(k \cos\varphi) k \sin\varphi$$

$$C(K \cos\varphi) K \sin\varphi \doteqdot 0$$

$$D(k \cos\varphi) k \sin\varphi \doteqdot 0$$

となるので v_R , w_R のみとなる。

これは又 $r \gg 1$ でも同じである。($r \gg 1$ ならば $\varphi \doteqdot 0$)

簡単の為に $r = r' = \bar{r}$, $\varphi = \varphi' = \bar{\varphi}$ とし, $\begin{matrix} G \\ F \end{matrix}$, $\begin{matrix} G_S \\ F_S \end{matrix}$ が無指向性ならば
(又 $y = 0$)

$$V_S = \frac{\rho\omega^2}{K^4}\Big[\frac{e^{-iKr}}{2\sqrt{2\pi i Kr}}\{(1 - i\,A(K\cos\varphi)\,G(0)\,G_S(0)$$

$$- \mathrm{sgn}(x'-x)\left(\frac{K}{k}\right)^4 C(K\cos\varphi)K\sin\varphi\ \ G_S(0)\,F(0)\}$$

$$+ \frac{e^{\mp iK_R(x'-x)-\sqrt{K_R^2-K^2}\,y'}}{2}\ G_S(0)\ \{\,i\,A'\,G(0) \pm \left(\frac{K}{k}\right)^4 C'\,F(0)\,\}\Big]$$

$$\cdots\cdots (5\cdot18)$$

$$+ \frac{\rho\omega^2}{k^4}\Big[\frac{e^{-ikr}}{2\sqrt{2\pi i k r}}\{(1 - i\,B(k\cos\varphi)\,F(0)\,F_S(0)$$

$$- \mathrm{sgn}(x'-x)\left(\frac{k}{K}\right)^4 D(k\cos\varphi)\,k\sin\varphi\ \ G(0)\,F_S(0)\,\}$$

$$+ \frac{e^{\mp iK_R(x'-x)-\sqrt{K_R^2-k^2}\,y'}}{2}\ \{\,i\,B'\ F(0) \pm \left(\frac{k}{K}\right)^4 D'\,G(0)\,\}\ F_S(0)\,\Big],$$

6. 放射動力と減衰抵抗

C が振動モード u_j , 速度振幅 I によって単位時間に放射するエネルギー, 放射動力 W は,

$$W = \frac{G}{4i\omega} I\bar{I} \int_C (u_j\ \bar{\tau}_j - \bar{u}_j\ \tau_j)\,ds\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6\cdot1)$$

で与えられる。

一方 (5・3) のイムピーダンスの実部 R は, u_j を実とすると,

$$R = Re\{Z\} = \frac{iG}{2\omega}\int_C (\tau_j\ \bar{u}_j - u_j\ \bar{\tau}_j)\,ds\ , \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6\cdot2)$$

と書けるから (6・1) は,

$$W = \frac{R}{2}\ I\bar{I}\quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6\cdot3)$$

となり, 放射動力は抵抗 R のなす仕事率である。(実効値をとれば $W = R\,|I|^2$ となる))

(6・1) 右辺の積分は自由表面で $\tau_j = 0$ を考慮するとグリーンの定理により充分大きい半円上の積分によって評価出来る。そこでは漸近展開 (4・8) 以下の式が成立ち, また $r \fallingdotseq r' \fallingdotseq \bar{r}$,

$\overline{\varphi} \doteqdot \varphi' \doteqdot \varphi$と考えられるから結局この積分は縦波，横波，レーリー波によるものの3成分に分けられる。

$$W = W_K + W_k + W_R \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6\cdot 4)$$

縦波と横波については(1・8)，(1・10)式から充分遠方では，

$$\left.\begin{aligned} u_r &\doteqdot -\frac{1}{K^2}\frac{\partial\gamma}{\partial r} \quad , \qquad u_\varphi \doteqdot -\frac{1}{k^2}\frac{\partial\omega}{\partial r} \quad , \\ \tau_r &\doteqdot \frac{k^2}{K^2}\gamma \quad , \qquad \tau_\varphi \doteqdot \omega \quad , \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6\cdot 5)$$

となるので

$$\int_r (u_1\,\overline{\tau_1} + u_2\,\overline{\tau_2} - \overline{u_1}\,\tau_1 - \overline{u_2}\,\tau_2\,)\,ds \ ,$$

$$= \quad r\int_r (\,u_r\,\overline{\tau_r} + u_\varphi\,\overline{\tau}_\varphi - \overline{u_r}\,\tau_r - \overline{u}_\varphi\,\tau_\varphi\,)\,d\varphi$$

$$= \quad r\int_r \left[\frac{k^2}{K^4}\left(\gamma\frac{\partial\overline{\gamma}}{\partial r} - \overline{\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial r}\right) + \frac{1}{k^2}\left(\omega\frac{\partial\overline{\omega}}{\partial r} - \overline{\omega}\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)\right] d\varphi$$

となり，(4・8) ～(4・13)を代入すると，

$$W_K = \frac{G I \overline{I}}{4\omega}\left(\frac{k^2}{K^4}\right)^4 \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi \Big| G^*(K\cos\varphi) - i\,A(K\cos\varphi)K\sin\varphi\;G(K\cos\varphi)$$

$$- \operatorname{sgn}(x'-x)\left(\frac{K}{k}\right)^4 e^{-\sqrt{K^2\cos^2\varphi - k^2}\,y}\,C(K\cos\varphi)K\sin\varphi\;F(K\cos\varphi)\Big|^2 d\varphi \ ,$$

$$G = \frac{\rho\omega^2}{k^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6\cdot 6)$$

$$W_k = \frac{\rho\,\omega\,I\,\overline{I}}{16\pi k^4}\int_0^\pi \Big| F^*(k\cos\varphi) - i\,B(k\cos\varphi)\,k\sin\varphi\;F(k\cos\varphi)$$

$$-\left(\frac{k}{K}\right)^4 \operatorname{sgn}(x'-x)\,e^{-\sqrt{k^2\cos^2\varphi - K^2}\,y}\,D(k\cos\varphi)\,k\sin\varphi\;G(k\cos\varphi)\Big|^2 d\varphi \ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6\cdot 7)$$

レーリー波については $|x'-x| \gg 1$ の検査面上で y 方向に積分すればよい。
結果は附録に示すように，

$$W_R = \frac{\rho\omega}{2} I \bar{I} \frac{q(\nu)}{k^4} \left[a^+ \overline{a^+} + a^- \overline{a^-} \right] , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6\cdot 8)$$

$$a^{\pm} = \frac{1}{2} \left[\left(A' G(\pm K_R) e^{-\sqrt{K_R^2-K^2}\,y} \mp i \left(\frac{K}{k}\right)^4 C' F(\pm K_R) e^{-\sqrt{K_R^2-k^2}\,y} \right] ,\right.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6\cdot 9)$$

特に　$G^*(K\cos\varphi) = G(K\cos\varphi) = G(0)$　,　$F = 0$　ならば,

$$\left.\begin{aligned}
W_K &= \frac{\rho\omega}{8\pi K^4} I\bar{I}\, |G(0)|^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |1 - iA(K\cos\varphi)K\sin\varphi|^2 d\varphi , \\
W_k &= \frac{\rho\omega}{8\pi K^4} I\bar{I}\, |G(0)|^2 \left(\frac{k}{K}\right)^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |e^{-\sqrt{k^2\cos^2\varphi-K^2}\,y} D(k\cos\varphi)k\sin\varphi|^2 d\varphi , \\
W_R &= \frac{\rho\omega}{4} I\bar{I} \frac{|G(0)|^2}{k^4} e^{-2\sqrt{K_R^2-K^2}\,y} |A'(K_R)|^2 \; q(\nu) ,
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (6\cdot 10)$$

$G = 0$,　$F = F(0)$　ならば,

$$\left.\begin{aligned}
W_K &= \frac{\rho\omega I\bar{I}}{8\pi k^2} \left(\frac{K}{k}\right)^4 |F(0)|^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |e^{-\sqrt{k^2\cos^2\varphi-k^2}\,y} C(K\cos\varphi)K\sin\varphi|^2 d\varphi , \\
W_k &= \frac{\rho\omega I\bar{I}}{8\pi} \frac{|F(0)|^2}{k^4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |1 - iB(k\cos\varphi)k\sin\varphi|^2 d\varphi , \\
W_R &= \frac{\rho\omega}{4} I\bar{I} \frac{|F(0)|^2}{k^4} q(\nu) |D'|^2 e^{-2\sqrt{K_R^2-k^2}\,y} ,
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (6\cdot 11)$$

それ故（6・10）の場合は,

$$W = \frac{\rho\omega I\bar{I}}{8K^4} |G(0)|^2 \left(Q_{KK} + Q_{KR}\, e^{-2\sqrt{K_R^2-K^2}\,y} \right) , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6\cdot 12)$$

（6・11）の場合は,

$$W = \frac{\rho\omega I\bar{I}}{8k^4} |F(0)|^2 \left(Q_{kk} + Q_{kR}\, e^{-2\sqrt{K_R^2-k^2}\,y} \right) , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6\cdot 13)$$

と書け，その値は附録に示す。

なお，媒質が無限に拡がっている場合は，

$$Q_{KK} = Q_{kk} = 1 \ , \quad Q_{KR} = Q_{kR} = 0 \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6\cdot14)$$

である。

なお，

$$\left.\begin{aligned} Q_K &= Q_{KK} + Q_{KR} \ e^{-2\sqrt{K_R^2 - K^2}\,y} \\ Q_k &= Q_{kk} + Q_{kR} \ e^{-2\sqrt{K_R^2 - k^2}\,y} \end{aligned}\right. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6\cdot15)$$

7\. 物体の振動，吸収動力，伝達動力

振源 S の振動により，境界 C で囲まれた物体が一つの振動モード u_j のみで振動する場合を考えよう。

速度振幅を I とし，イムピーダンスを Z，物体自身のイムピーダンスを Z_i，強制力（5・15）で与えられる）を V_s とすると運動方程式は，

$$(Z + Z_i) I = V_s \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7\cdot1)$$

所で，

$$\left.\begin{aligned} Z &= R + iX \ , \\ Z_i &= R_e + iX_i \ , \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7\cdot2)$$

こゝに R_e は附加減衰抵抗（あるいは内部抵抗）と書けるから吸収動力は，

$$W_{ab} = \frac{R_e}{2} I \bar{I} = \frac{R_e}{2} \frac{V_s \bar{V_s}}{| R + R_e + i (X + X_i) |^2} \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7\cdot3)$$

であり，この最大値は所謂共役整合の時最大である。

つまり，

$$X + X_i = 0 \ , \quad R = R_e \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7\cdot4)$$

その値は，

$$\mathrm{Max}\,(W_{ab}) = \frac{V_s \bar{V_s}}{8R} \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7\cdot5)$$

なお，R_e が 0 の時は，入力エネルギーは放射エネルギーと等しくなり，その値は同調時 $(X + X_i = 0)$ に，

$$W_T = \frac{R}{2} I \bar{I} = \frac{V_s \bar{V_s}}{2R} \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7\cdot6)$$

となる。

さて振源Sの放射動力をW_sとするとW_{ab}はCに伝達された動力と見なす事も出来るから，その効率は，

$$\frac{W_{ab}}{W_s} = \eta \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7\cdot7)$$

で与えられる。

従って，

$$\mathrm{Max.}\ \eta = \frac{V_s \overline{V_s}}{8RW_s} \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7\cdot8)$$

今，簡単の為に振源は無指向性で $G_s=0$とするとW_sは(6・13)で与えられる。

またCのFもGも無指向性とすると(5・18)により，

$$V_s = +\frac{\rho\omega I_s}{i\,k^4} F_S(0)\Big[\frac{e^{-ikr}}{2\sqrt{2\pi i k r}}\{(1-iB(k\cos\varphi)F(0) - \mathrm{sgn}(x'-x)\left(\frac{k}{K}\right)^4 D\,k\,\sin\varphi\, G(0)\} + \frac{e^{\mp iK_R(x'-x)-\sqrt{K_R^2-k^2}\,y'}}{2}(i\,B'F(0)\pm\left(\frac{k}{K}\right)^4 D'G(0))\Big],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7\cdot9)$$

こゝに(5・18)は，I_sが陽に出ていないのでこゝではそれを外に出してある。

また，上式で$G(0)$を無視すると(6・3)と(6・13)から，

$$R = \frac{\rho\omega}{4k^4}\,|F(0)|^2\,Q_k \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7\cdot10)$$

また，

$$W_s = \frac{\rho\omega I_s \overline{I_s}}{8k^4}\,|F_s(0)|^2\,Q_k \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7\cdot11)$$

これらを(7・8)に代入すると，

$$\mathrm{Max.}\ \eta = \frac{\rho^2\omega^2 I_s \overline{I_s}\,|F_s(0)|^2\,|F(0)|^2}{8k^8\times\frac{\rho^2\omega^2}{32k^8} I_s\overline{I_s}\,|F_s\,F|^2 Q_k^2}\,|\qquad \text{同下} \qquad|^2$$

$$= \frac{4}{Q_k^2}\left|\frac{e^{-ikr}}{2\sqrt{2\pi i k r}}\big(1-iB(k\cos\varphi)\big)+\frac{1}{2}B'e^{\mp iK_R(x'-x)-\sqrt{K_R^2-k^2}\,y}\right|^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7\cdot12)$$

$r \gg 1$ で $\varphi \doteqdot 0$ ならば右辺第１項は小さくて，

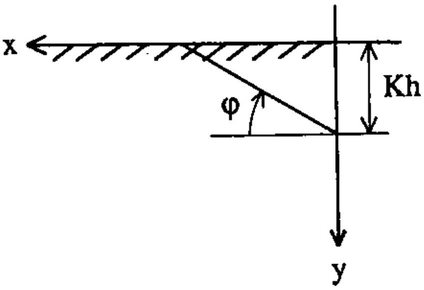
$$\mathrm{Max.}\ \eta = \frac{|B'|^2}{Q_k^2} e^{-2\sqrt{K_R^2 - k^2}y'} , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7 \cdot 13)$$

y' は S の中心の y 座標である。

一般には大変複雑になるが，いづれにしても η はコッチン関数 F，G と r，φ，また振源の深さの関数となる。

8. 計 算 例

震源の一つの代表例として(4・16)の場合を考えて見よう。

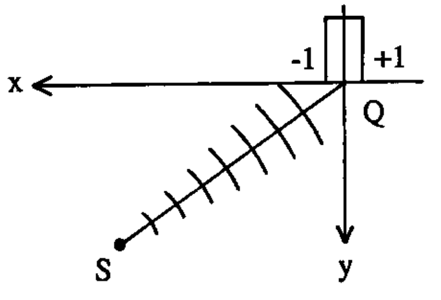


それによる地表面の変位を幾つかの深さについて計算した例を図に示す。(末)

計算には (4・3) ～ (4・7) の表現を用いるが近似的には (4・17) から (1・8) により変位を求める。

これらの図から φ が -30°～-60° の範囲を除けば殆どレーリー波のみとなる事がわかる。

次に今度は地表に建物がある場合を考えよう。建物の振動は一様梁と見なせるとし各断面は変形せず，又垂直方向にも変形しないと仮定しよう。そうすると地面に接する所での変形は３つに別けて考えられる。



i) 左右動 (肩添字１で示す)

$$u_1^{(1)} = 1 , \quad u_2^{(1)} = 0$$

$$\text{for} \quad |x| \leqq 1 \quad , \qquad (8 \cdot 1)$$

それに対するインピーダンスは (5・3) により，

$$Z_{11} = \frac{\rho\omega}{ik^2} \int_{-1}^{1} \tau_1^{(1)} dx \quad ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots (8 \cdot 2)$$

ii）上下動（肩添字２で示す）

$$u_1^{(2)} = 0 \ , \quad u_2^{(2)} = 1 \ , \quad \text{for} \quad |x| \leq 1 \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8 \cdot 3)$$

$$Z_{22} = \frac{\rho\omega}{i\ k^2} \int_{-1}^{1} \tau_2^{(2)}\ dx \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8 \cdot 4)$$

iii）回転動（肩添字３で示す）

$$u_1^{(3)} = 0 \ , \quad u_2^{(2)} = x \ , \quad \text{for} \quad |x| \leq 1 \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8 \cdot 5)$$

$$Z_{33} = \frac{\rho\omega}{i\ k^2} \int_{-1}^{1} \tau_2^{(3)}\ x\ dx \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8 \cdot 6)$$

$$Z_{31} = \frac{\rho\omega}{i\ k^2} \int_{-1}^{1} \tau_1^{(3)}\ dx \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8 \cdot 7)$$

一方ｉ）から，

$$Z_{13} = \frac{\rho\omega}{i\ k^2} \int_{-1}^{1} \tau_2^{(1)}\ x\ dx \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8 \cdot 8)$$

(5・5) により，

$$Z_{31} = Z_{13} \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8 \cdot 9)$$

今振動の速度振幅を夫々 I_1 ，I_2 ，I_3 とし，強制力を V_1 ，V_2 ，V_3 とすると運動方程式は，

$$\left.\begin{aligned} I_1 \left(Z_{11} + Z_{11}^{(i)} \right) + I_3 \left(Z_{13} + Z_{13}^{(i)} \right) &= V_1 \ , \\ I_2 \left(Z_{22} + Z_{22}^{(i)} \right) \qquad\qquad\qquad &= V_2 \ , \\ I_1 \left(Z_{31} + Z_{31}^{(i)} \right) + I_3 \left(Z_{33} + Z_{33}^{(i)} \right) &= V_3 \ , \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (8 \cdot 10)$$

$Z_{ij}^{(i)}$ は附録Dに示す建物のイムピーダンスである。

なお，

$$Z_{22}^{(i)} = i\omega\ (2\omega\ell) \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8 \cdot 11)$$

これを解けばよいわけである。

特に建物の固有振動数，つまり

$$\Delta_1\ \Delta_2 = (\cosh a \cos a)^2 - (\sinh a \sin a)^2 = 0 \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (8 \cdot 12)$$

の所では $Z^{(i)}$ は無限大となり，I_1 ，I_3 は0となるが，Δ_1 $\Delta_2 \to 0$ として（D・7）に代入すると $y(x)$ は有限な値となる。

附録A　L, M, N, O 関数

$$\left.\begin{array}{l}(\Delta+K^2)\left\{\begin{array}{l}L(P,Q)\\O(P,Q)\end{array}\right\}=0\\[2em](\Delta+k^2)\left\{\begin{array}{l}M(P,Q)\\N(P,Q)\end{array}\right\}=0\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (A\cdot1)$$

$$\left.\begin{array}{l}(\Delta'+K^2)\left\{\begin{array}{l}L(P,Q)\\N(P,Q)\end{array}\right\}=0\\[2em](\Delta'+k^2)\left\{\begin{array}{l}M(P,Q)\\O(P,Q)\end{array}\right\}=0\end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (A\cdot2)$$

$$\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\quad,\qquad\Delta'=\left(\frac{\partial}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial}{\partial y'}\right)^2\quad,$$

$$P\equiv(x,\ y)\quad,\qquad Q\equiv(x',\ y')\quad,$$

$$\left.\begin{array}{l}L_{xy}(P,Q)+\left(\frac{K^2}{2}+\frac{K^2}{k^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)N(P,Q)=0\\[2em]N_{xy}(P,Q)-\left(\frac{k^4}{2K^2}+\frac{k^2}{K^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)L(P,Q)=0\end{array}\right\}\ \text{for}\quad y=0\ ,\quad\cdots\cdots\ (A\cdot3)$$

$$\left.\begin{array}{l}O_{xy}(P,Q)+\frac{K^2}{k^2}\left(\frac{K^2}{2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)M(P,Q)=0\\[2em]M_{xy}(P,Q)-\frac{k^2}{K^2}\left(\frac{K^2}{2}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)O(P,Q)=0\end{array}\right\}\ \text{for}\quad y=0\ ,\quad\cdots\cdots\ (A\cdot4)$$

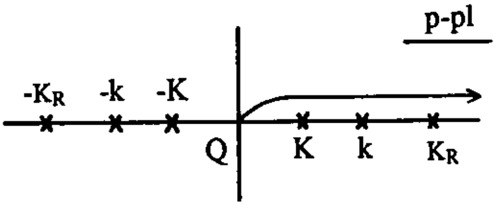
L，Mは領域内に特異性を有し，

$$\left.\begin{array}{l}L(P,Q)=\frac{i}{4}\ H_0^{(2)}(KR)+L'(P,Q)\\[1em]M(P,Q)=\frac{i}{4}\ H_0^{(2)}(kR)+M'(P,Q)\end{array}\right\}\ R=\overline{PQ}\ ,\quad\cdots\cdots\ (A\cdot5)$$

L'，M'，N，Oは領域内で正則とする。

$$\frac{i}{4} H_0(KR) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,|y'-y|} dp \cos p(x-x')}{\sqrt{p^2-K^2}} , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A\cdot 6)$$

積分路は下図の如く採るものとする。



なお，以後 $x'=0$ とおく。

今，(A・1)，(A・2) を考えて，

$$L'(P,Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y+y')} \cos px\, A(p) dp ,$$

$$M' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y+y')} \cos px\, B(p) dp ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A\cdot 7)$$

$$N = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,y'-\sqrt{p^2-k^2}\,y} \sin px\, C(p)\, dp ,$$

$$O = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,y-\sqrt{p^2-k^2}\,y'} \sin px\, D(p)\, dp ,$$

とおき，(A・3)，(A・4) の条件を考えると，

$$\frac{p\sqrt{p^2-K^2}}{\sqrt{p^2-K^2}} + A(p)\sqrt{p^2-K^2}\; p + \frac{K^2}{k^2}\left(\frac{k^2}{2} - p^2\right) C(0) = 0$$

$$-\; p\sqrt{p^2-k^2}\; C(p) - \frac{k^2}{K^2}\left(\frac{k^2}{2} - p^2\right)\left[\frac{-1}{\sqrt{p^2-K^2}} + A(p)\right] = 0$$

$$-p\sqrt{p^2-K^2}\ D+\frac{K^2}{k^2}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\left(\frac{-1}{\sqrt{p^2-k^2}}+B\right)=0$$

$$+p+p\sqrt{p^2-k^2}\ B-\frac{k^2}{K^2}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)D=0$$

$$\left.\begin{aligned}&p\sqrt{p^2-K^2}\ A+\frac{K^2}{k^2}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)C=-p\\&+\frac{k^2}{K^2}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)A+p\sqrt{p^2-k^2}\ C=\frac{k^2}{K^2}\frac{\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)}{\sqrt{p^2-K^2}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\ (A\cdot 8)$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{K^2}{k^2}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)B-p\sqrt{p^2-K^2}\ D=\frac{K^2}{k^2}\frac{\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)}{\sqrt{p^2-k^2}}\\&p\sqrt{p^2-k^2}\ B-\frac{k^2}{K^2}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)D=-p\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (A\cdot 9)$$

$$\left.\begin{aligned}&A=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2}{\sqrt{p^2-K^2}}+p^2\sqrt{p^2-k^2}\right]=\frac{-1}{\sqrt{p^2-K^2}}+\frac{2\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2}{\Delta\sqrt{p^2-K^2}}\\&B=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{k^2}{K^2}p\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)+\frac{k^2}{K^2}\frac{\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)p\sqrt{p^2-K^2}}{\sqrt{p^2-K^2}}\right]\\&\quad=-\frac{2k^2}{\Delta K^2}p\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right),\\&\Delta=\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2-p^2\sqrt{p^2-k^2}\ \sqrt{p^2-K^2},\end{aligned}\right\}\cdots\ (A\cdot 10)$$

$$\left.\begin{aligned}&D=\frac{2K^2}{k^2\ \Delta}p\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)=-\frac{K^4}{k^4}C,\\&B=\frac{1}{\Delta}\left[\frac{\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2}{\sqrt{p^2-k^2}}+p^2\sqrt{p^2-K^2}\right]=\frac{-1}{\sqrt{p^2-k^2}}+2\frac{\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2}{\Delta\sqrt{p^2-k^2}},\end{aligned}\right\}\cdots\ (A\cdot 11)$$

それ故，

$$L(P,Q) = \frac{i}{4}\{H_0^{(2)}(KR) + H_0^{(2)}(KR')\}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{p^2-K^2}(y+y')}\cos px}{\Delta\sqrt{p^2-K^2}}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2 dp\ ,\quad R'=\sqrt{x'^2+(y+y')^2}$$

$$\left.\begin{aligned}
M(P,Q) &= \frac{i}{4}\{H_0(kR) + H_0(kR')\} \\
&\quad +\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-\sqrt{p^2-k^2}(y+y')}\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2\cos x}{\Delta\sqrt{p^2-k^2}}\,dp\ , \\
N(P,Q) &= -\frac{k^2}{\pi K^2}\int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2-K^2}\,y'-\sqrt{p^2-k^2}\,y}\,p\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\sin px\,\frac{dp}{\Delta}\ , \\
O(P,Q) &= \frac{K^2}{\pi k^2}\int_0^\infty e^{-\sqrt{p^2-k^2}\,y-\sqrt{p^2-k^2}\,y'}\,p\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)\sin px\,\frac{dp}{\Delta}\ ,
\end{aligned}\right\}\qquad\cdots\text{(A·12)}$$

NとOを比較すると，

$$\left(\frac{k}{K}\right)^4 O(P,Q) = N(Q,P)\ ,\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(A·13)}$$

またQ点が自由表面上にある時は次式の関係がある。

$$\left.\begin{aligned}
L_{x'y'}(P,Q) + \frac{k^2}{K^2}\left(\frac{k^2}{2}+\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right)O(P,Q) = 0 \\
O_{x'y'}(P,Q) - \frac{K^2}{k^2}\left(\frac{k^2}{2}+\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right)L(P,Q) = 0
\end{aligned}\right\}\ \text{for}\quad y'=0,\ \cdots\cdots\cdots\ \text{(A·14)}$$

$$\left.\begin{aligned}
N_{x'y'}(P,Q) + \frac{k^2}{K^2}\left(\frac{k^2}{K^2}+\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right)M(P,Q) = 0 \\
M_{x'y'}(P,Q) - \frac{K^2}{k^2}\left(\frac{K^2}{k^2}+\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\right)N(P,Q) = 0
\end{aligned}\right\}\ \text{for}\quad y'=0,\ \cdots\cdots\cdots\ \text{(A·15)}$$

i) 積分表示

(A・12) の表現は数値積分に向いてないので少し変形しよう。

まず，Δは $p=\pm K_R$ に零点をもつ。

$$\Delta=\left(\frac{k^2}{2}-p^2\right)^2-p^2\sqrt{p^2-k^2}\sqrt{p^2-K^2}$$

$$\xrightarrow[p\to K_R]{}\quad (p^2-K_R^2)\,k^2\,A(K_R)\quad, \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A\cdot 16)$$

ν	σ	$(\frac{K}{k})^2$	K_R/k'	A
1/2	1/3	1/4	1.072	
1/3	1/4	1/3	1.088	

$$\nu=\frac{\sigma}{1-\sigma}\,,\quad \left(\frac{K}{k}\right)^2=\frac{1-\nu}{2}$$

なお，$(p/k)^2=x$ として

$$A=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta}{k^4}\right)\Bigg|_{x=(p/K_R)^2}=(2x-1)-\sqrt{x-1}\sqrt{x-\frac{1-\nu}{2}}$$

$$-\frac{x}{2}\left(\frac{\sqrt{x-\frac{1-\nu}{2}}}{\sqrt{x-1}}+\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-\frac{1-\nu}{2}}}\right)$$

$$=(2x-1)-\frac{1}{2\sqrt{x-1}\sqrt{x-\frac{1-\nu}{2}}}\left\{2(x-1)\left(x-\frac{1-\nu}{2}\right)+x\left(x-\frac{1-\nu}{2}\right)+x(x-1)\right\}$$

$$=(2x-1)-\frac{2x^2-\frac{3}{2}(3-\nu)x+\frac{3}{2}(1-\nu)}{2\sqrt{x-1}\sqrt{x-\frac{1-\nu}{2}}}=$$

$$=(2x-1)-\frac{x\left\{2x^2-\frac{3}{2}(3-\nu)x+\frac{3}{2}(1-\nu)\right\}}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}, \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A\cdot 17)$$

$\because\ \ \Delta=0$ 故 $\qquad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2=x\sqrt{x-1}\sqrt{x-\frac{1-\nu}{2}}$

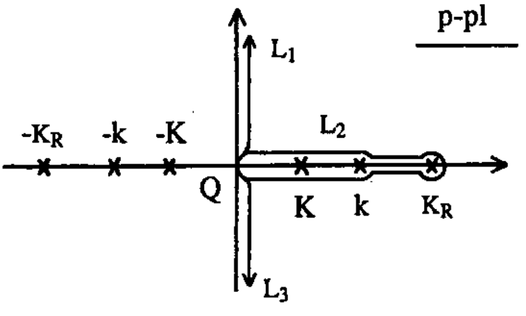
さて，これらの積分を今

$$\left.\begin{aligned} I &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-qy}\cos px\; F\frac{dp}{\varDelta}\ , \\ J &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-qy}\sin px\; F\frac{dp}{\varDelta}\ , \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A\cdot 18)$$

で代表させて，積分表示を考えよう。

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{ipx-qy}\frac{F}{\varDelta}\,dp \; + \; \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-ipx-qy}\frac{F}{\varDelta}\,dp$$

と書けるが，以下$x>0$（$y>0$）と考えよう。



そうして図のような積分路を考えると，

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{L_1} e^{ipx-qy}\frac{F}{\varDelta}\,dp \; + \; \frac{1}{2\pi}\int_{L_2+L_3} e^{-ipx-qy}\frac{F}{\varDelta}\,dp$$

と変形すると，

$$I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{L_1} e^{ipx-qy}\frac{F}{\varDelta}\,dp + \frac{1}{2\pi}\int_{L_3}\frac{e^{-ipx-qy}F}{\varDelta}\,dp$$

$$= \frac{i}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-mx-q(im)y}\frac{F(im)}{\varDelta(im)}\,dm \; + \; \frac{-i}{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-mx-q(-im)y}\frac{F(-im)}{\varDelta(-im)}\,dm\ , \quad \cdots\cdots (A\cdot 19)$$

$$\begin{aligned} \varDelta(im) &= \left(\frac{k^2}{2}+m^2\right)^2 - m^2\sqrt{(m^2+k^2)(m^2+K^2)}\ , \\ &= \varDelta(-im) \end{aligned}$$

K_R の回りの留数は (A・16) により，

$$I_2 = -i\,\frac{e^{-iK_R x - q(K_R)y}\,F(K_R)}{2K_R\,k^2\,\Delta(K_R)}\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A\cdot 20)$$

その他の積分は $p = k\cos\theta$ とおいて，

$$I_3 = \frac{+1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-ikx\cos\theta - q(k\cos\theta)y}\,F(k\cos\theta)\,k\sin\theta\,d\theta}{\Delta(k\cos\theta)}\ ,$$

$$\Delta(k\cos\theta) = k^4\left[\left(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)^2 - i\cos^2\theta\,\sin\theta\sqrt{\cos^2\theta - \frac{1-\nu}{2}}\,\right]$$

$$= k^4\left[\left(\frac{\cos 2\theta}{2}\right)^2 - i\sin\theta\cos^2\theta\sqrt{\cos^2\theta - \frac{1-\nu}{2}}\,\right]$$

$$\text{for}\quad \cos\theta > \frac{1-\nu}{2}\ , \qquad (A\cdot 21)$$

$$= k^4\left[\left(\frac{\cos 2\theta}{2}\right)^2 \pm \sin\theta\cos^2\theta\sqrt{\frac{1-\nu}{2} - \cos^2\theta}\,\right]$$

$$\text{for}\quad \cos\theta < \frac{1-\nu}{2}\left\{\begin{array}{l}(+)\ \text{for}\ \theta>0\\ (-)\ \text{for}\ \theta<0\end{array}\right\}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A\cdot 22)$$

(A・12) に適用すると，

$$L'' = L - \frac{i}{4}\left\{H_0^{(2)}(K_R) + H_0^{(2)}(K_R')\right\}$$

$$= \frac{i}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-mx}\cos\{\sqrt{m^2+K^2}\,(y+y')\}\,\frac{\left(m^2+\frac{k^2}{2}\right)^2 dm}{\Delta(im)\sqrt{m^2+K^2}}$$

$$+ \frac{\left(K_R^2 - \frac{k^2}{2}\right)^2 e^{-iK_R x - \sqrt{K_R^2-K^2}(y+y')}}{2i\,k^2\,K_R\,\Delta(K_R)\sqrt{K_R^2-K^2}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-ikx\cos\theta - (y+y')\sqrt{k^2\cos^2\theta - K^2}}\left(\frac{k^2}{2} - k^2\cos^2\theta\right)^2 k\sin\theta\,d\theta}{\Delta(k\cos\theta)\sqrt{k^2\cos^2\theta - K^2}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A\cdot 23)$$

$$\sqrt{k^2\cos^2\theta-K^2} = i\sqrt{K^2-k^2\cos^2\theta} \qquad \text{for} \quad K>k\cos\theta\ ,\ \theta>0\ ,$$

$$= -i\sqrt{K^2-k^2\cos^2\theta} \qquad \text{for} \quad K>\cos\theta\ ,\ \theta<0\ ,$$

$$M'' = M - \frac{i}{4}\ \{\ H_0^{(2)}(kR) + H_0^{(2)}(kR')\ \}$$

$$= \frac{i}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-mx}\cos\{(\sqrt{m^2+k^2}(y+y')\}\frac{(m^2+\frac{k^2}{2})^2\,dm}{\varDelta(im)\sqrt{m^2+k^2}}$$

$$+ \frac{(K_R{}^2-\frac{k^2}{2})^2\ e^{-iK_R x-\sqrt{K_R^2-k^2}(y+y')}}{2\,i\,K_R\ k^2\ \varDelta(K_R)\sqrt{K_R{}^2-k^2}}$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-ik(x\cos\theta+\sqrt{y+y'}\sin\theta)}(\frac{k^2}{2}-k^2\cos^2\theta)^2\,d\theta}{\varDelta(k\cos\theta)}\ , \qquad (A\cdot 24)$$

$$J = J_1 + J_2 + J_3$$

$$J_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty}\frac{e^{-mx}\,dm}{\varDelta(im)}\left[F(im)\,e^{-q(im)y} + F(-im)\,e^{-q(-im)y}\right]\ ,$$

$$J_2 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{(K_R)}\frac{e^{-ipK-qy}F(K_1)}{\varDelta}\,dp = \frac{F(K_R)\ e^{-iK_R x-q(K_R)y}}{2K_R\ k^2\ \varDelta(K_R)}\ ,$$

$$J_3 = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-ikx\cos\theta-q(k\cos\theta)y}F(k\cos\theta)\,k\sin\theta\ d\theta}{\varDelta(k\cos\theta)}\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (A\cdot 25)$$

$$N(P,Q)=-\frac{k^2}{2\pi i K^2}\int_0^{\infty}\frac{e^{-mx}\,dm}{\Delta(im)}\Big[\, e^{-i\sqrt{m^2+k^2}\,y-i\sqrt{m^2+K^2}\,y'}\; im\left(\frac{k^2}{2}+m^2\right)-im\left(\frac{k^2}{2}+m^2\right)\; e^{i\sqrt{m^2+k^2}\,y'+\sqrt{m^2+K^2}\,y'}\Big]$$

$$N(P,Q)=\frac{+k^2}{\pi K^2}\int_0^{\infty} e^{-mx}\, m\left(\frac{k^2}{2}+m^2\right)\sin\left(\sqrt{m^2+k^2}\,y+\sqrt{m^2+K^2}\,y'\right)\frac{dm}{\Delta\,(im)}$$

$$-\frac{\left(\frac{k^2}{2}-K_R^2\right)}{2K^2\Delta(K_R)}\; e^{-iK_R x-\sqrt{K_R^2-K^2}\,y'-\sqrt{K_R^2-k^2}\,y}$$

$$+\frac{ik^2}{2\pi K^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ikx\cos\theta-\sqrt{k^2\cos^2-K^2}\,y'-iky\sin\theta}\; k\cos\theta\left(\frac{k^2}{2}-k^2\cos^2\theta\right)\frac{k\sin\theta}{\Delta(k\cos\theta)}\,d\theta\ , \qquad \cdots\cdots (A\cdot 26)$$

$$O(P,Q)=-\frac{K^2}{\pi k^2}\int_0^{\infty} e^{-mx}\, m\left(\frac{k^2}{2}+m^2\right)\sin\left\{\sqrt{m^2+k^2}\,y'+\sqrt{m^2+K^2}\,y\right\}\frac{dm}{\Delta(im)}$$

$$+\frac{K^2\left(\frac{k^2}{2}-K_R^2\right)}{2k^4\,\Delta(K_R)}\; e^{-iK_R x-\sqrt{K_R^2-K^2}\,y-\sqrt{K_R^2-k^2}\,y'}$$

$$-\frac{ik^2}{2\pi k^2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-ikx\cos\theta-iky'\sin\theta-\sqrt{k^2\cos^2\theta-K^2}\,y}\; k^4\cos\theta\left(\frac{1}{2}-\cos^2\theta\right)\frac{\sin\theta\, d\theta}{\Delta(k\cos\theta)}\ , \qquad \cdots\cdots (A\cdot 27)$$

ii) k が小さい時，あるいは x，y が小さい時はこれらの積分は p －平面で p の大きい所の値で決定される。またハンケル関数の部分はよくわかっているから除いて考えよう。

(A・7)，(A・10)，(A・11) から，

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta \xrightarrow[p>k\to 0]{} -\frac{k^2-K^2}{2}p^2=-\frac{1+\nu}{4}k^2\ p^2\ ,\\
&A+\frac{1}{\sqrt{p^2+k^2}}\ \to -\frac{8}{1+\nu}\ \frac{p}{k^2}\ ,\\
&B+\frac{1}{\sqrt{p^2-k^2}}\ \to -\frac{8}{1+\nu}\ \frac{p}{k^2}\ ,\\
&C\ \to -\frac{16\ \ p}{(1+\nu)(1-\nu)k^2}\ ,\\
&D\ \to +4\,\frac{1-\nu}{1+\nu}\ \frac{p}{k^2}\ ,
\end{aligned}\right\}\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A\cdot 28)$$

となるが,

$$\int_0^{\infty} e^{-py+ipx}\, dp = \frac{y+ix}{x^2+y^2} \quad ,$$

$$\int_0^{\infty} e^{-py+ipx}\, p\, dp = \frac{(y^2-x^2)+2ixy}{(x^2+y^2)^2} \quad ,$$

であるから(A・7)より,

$$L'' \to + \frac{4\{(x-x')^2-(y+y')^2\}}{\pi(1+\nu)k^2 R'^4},$$

$$M'' \to \frac{4\{(x-x')^2-(y+y')^2\}}{\pi(1+\nu)k^2 R'^4},$$

$$N \to - \frac{16(x-x')(y+y')}{\pi(1-\nu^2)(R')^4 k^2} \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A\cdot 29)$$

$$O \to \frac{4(1-\nu)(x-x')(y+y')}{\pi(1+\nu)k^2(R')^4} \quad ,$$

iii) 漸近展開

(A・23) ~ (A・27)の積分表示において, x, y が充分大きいとすると右辺第1項の積分はすべて$O\left(\frac{1}{R'}\right)$以下の項であるから無視出来るので結局第3項の積分を定常点法によって評価すればよい。

その為には定常点の近くで次の積分がわかればよい。

$$I = \int F(\theta)\, e^{-ik(x\cos\theta+y\sin\theta)}\, d\theta \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A\cdot 30)$$

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ \frac{\pi}{2} > \varphi > 0$$

の場合のみ考えよう。

まずIについては, $x\cos\theta + y\sin\theta = r\cos(\theta-\varphi)$であるから$\frac{\pi}{2} > \theta = \varphi > 0$ が定常点であるから

$$I = e^{-ikr} F(\varphi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{+\frac{i}{2}krt^2}\, dt = \sqrt{\frac{2\pi i}{kr}}\, F(\varphi)\, e^{-ikr} \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (A\cdot 31)$$

(A・23) の場合は $k\cos\theta$ を $K\cos\theta'$ とおきかえれば上と同じになる。（ p の実軸上（k, K）の区間には定常点はない。）

$$L'' \rightarrow \frac{\left(K_R^2-\frac{k^2}{2}\right)^2 e^{-iK_Rx-\sqrt{K_R^2-K^2}y+iK_Rx'-\sqrt{K_R^2-K^2}y'}}{2ik^2K_R\,\Delta(K_R)\sqrt{K_R^2-K^2}}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi iKr}}\frac{\left(\frac{k^2}{2}-K^2\cos^2\varphi\right)}{\Delta(K\cos\varphi)}e^{-iKr+iK(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)}$$

$$M'' \rightarrow \frac{\left(K_R^2-\frac{k^2}{2}\right)^2 e^{-iK_Rx-\sqrt{K_R^2-k^2}y+iK_Rx'-\sqrt{K_R^2-k^2}y'}}{2iK_Rk^2\,\Delta(K_R)\sqrt{K_R^2-k^2}}$$

$$+\frac{k^4\left(\frac{1}{2}-\cos^2\theta\right)^2 e^{-ikr+ik(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)}}{\sqrt{2\pi ikr}\;\Delta(k\cos\varphi)}$$

$$N \rightarrow -\frac{\left(\frac{k^2}{2}-K_R^2\right)^2}{2K^2\Delta(K_R)}e^{-iK_Rx-\sqrt{K_R^2-k^2}y+iK_Rx'-\sqrt{K_R^2-K^2}y'}$$

$$+\frac{i\sqrt{i}}{\sqrt{2\pi kr}}\cdot\frac{k^6}{K^2}\frac{\left(\frac{1}{2}-\cos^2\varphi\right)\sin\varphi\cos\varphi}{\Delta(k\cos\varphi)}e^{-ikr+ikx'\cos\varphi-\sqrt{k^2\cos^2\varphi-K^2}y'}$$

$$O \rightarrow \frac{K^2\left(\frac{k^2}{2}-K_R^2\right)}{2k^4\Delta(K_R)}e^{-iK_Rx-\sqrt{K_R^2-K^2}y+iK_Rx'-\sqrt{K_R^2-k^2}y'}$$

$$+\frac{i\sqrt{i}}{\sqrt{2\pi Kr}}\frac{K^4}{k^2}\frac{\left(\frac{k^2}{2}-K^2\cos^2\theta\right)e^{-iKr+iKx'\cos\varphi-\sqrt{K^2\cos^2\varphi-k^2}y'}}{\Delta(K\cos\varphi)}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\Delta(K\cos\varphi)=\left(\frac{k^2}{2}-K^2\cos^2\varphi\right)^2\pm K^2\cos^2\varphi\sin\varphi\sqrt{k^2-K^2\cos^2\varphi},$$

$$\begin{pmatrix} + & \text{for} & \varphi>0 \\ - & \text{for} & \varphi<0 \end{pmatrix}$$

以上 ……………… (A・32)

（注意） N と O は $y'\gtreqless y$ で横波，縦波交替する。

なお,

$$\frac{i}{4}\ H_0\ (kR)\ \rightarrow\ \frac{i\ \sqrt{i}}{2\sqrt{2\pi k r}}\ e^{-ikr+ik(x'\cos\varphi+y'\sin\varphi)}\ ,$$

$$\frac{i}{4}\ H_0\ (kR')\ \rightarrow\ \frac{i\ \sqrt{i}}{2\sqrt{2\pi k r}}\ e^{-ikr+ik(x'\cos\varphi-y'\sin\varphi)}\ ,$$

附録B　レーリー波の放射エネルギー

(3・6)，(3・7)よりxの正方向に進むレーリー波は，

$$\left.\begin{aligned} r &= \left(\frac{i}{2}A'\,G+\frac{C'}{2}\,F\left(\frac{K}{k}\right)^4\right)e^{-iK_R x-\sqrt{K_R^2-K^2}\,y} , \\ \omega &= \left(\frac{i}{2}B'\,F+\frac{D'}{2}\,G\left(\frac{k}{K}\right)^4\right)e^{-iK_R x-\sqrt{K_R^2-k^2}\,y} , \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{B}\cdot 1)$$

$$\left.\begin{aligned} A' &= \frac{2\left(\frac{k^2}{2}-K_R^2\right)^2}{\Delta'\sqrt{K_R^2-K^2}} , \qquad B' = \frac{2\left(\frac{k^2}{2}-K_R^2\right)^2}{\Delta'\sqrt{K_R^2-k^2}} , \\ C' &= \frac{2k^2 K_R\left(K_R^2-\frac{k^2}{2}\right)}{\Delta'\ K^2} , \qquad D' = \frac{2K_R\left(K_R^2-\frac{k^2}{2}\right)K^2}{\Delta'\ K^2} , \\ \Delta' &= \lim_{p\to K_R}\left(\frac{\Delta(p)}{p-K_R}\right) , \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (\mathrm{B}\cdot 2)$$

$$B'/A'=\sqrt{K_R^2-K^2}\Big/\sqrt{K_R^2-k^2} , \quad \frac{B'}{C'}=+\frac{\left(K_R^2-\frac{k^2}{2}\right)}{\sqrt{K_R^2-k^2}\,K_R}\left(\frac{K}{k}\right)^2$$

$$C'/A'=-B'/D'=\left(\frac{k}{K}\right)^2\frac{K_R\sqrt{K_R^2-K^2}}{K_R^2-\frac{k^2}{2}} , \qquad \cdots\cdots (\mathrm{B}\cdot 3)$$

$$D'/C'=-(K/k)^4 , \qquad D'/A'=-\left(\frac{K}{k}\right)^2\left(\frac{K_R\sqrt{K_R^2-K^2}}{K_R^2-\frac{k^2}{2}}\right) ,$$

それ故，今

$$\left.\begin{aligned} r &= i\,a\,e^{-iK_R x-\sqrt{K_R^2-K^2}\,y} , \\ \omega &= b\,e^{-iK_R x-\sqrt{K_R^2-k^2}\,y} , \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{B}\cdot 4)$$

とおくと，

$$
\left.\begin{aligned}
a &= \frac{A'}{2}\left(G - i\,\frac{D'}{A'}\,F\right) \\
b &= -\frac{C'}{2}\left(G - i\,\frac{D'}{A'}\,F\right) \\
a/b &= (A'/D')\left(\frac{K}{k}\right)^4 = -A'/C'
\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(B}\cdot\text{5)}
$$

$$
u_1\Big|_{y=0} = -\frac{1}{K^2}\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{1}{k^2}\frac{\partial \omega}{\partial y}\Big|_{y=0} = \left(-\frac{a}{K^2}K_R - \frac{\sqrt{K_R{}^2-k^2}}{k^2}\,b\right)e^{-iK_R x}
$$

$$
u_2\Big|_{y=0} = +\,i\left[\frac{\sqrt{K_R{}^2-K^2}}{K^2}\,a + \frac{K_R}{k^2}\,b\right]e^{-iK_R x}
$$

$$
u_1\Big|_{y=0} = -\,a\,\frac{K_R}{k^2}\left(1 - \frac{K^2\sqrt{K_R{}^2-k^2}}{k^2\,K_R}\,\frac{k^2}{K^2}\,\frac{K_R\sqrt{K_R{}^2-K^2}}{K_R{}^2-\frac{k^2}{2}}\right)e^{-iK_R x}
$$

$$
= -\,\frac{a\,k^2}{2K^2\,K_R}\,e^{-iK_R x} \qquad ,
$$

$$
u_2\Big|_{y=0} = \frac{i\sqrt{K_R{}^2-K^2}}{K^2}\,a\left(1 - \frac{K_R{}^2\,K^2}{k^2\sqrt{K_R{}^2-K^2}}\cdot\frac{k^2}{K^2}\,\frac{\sqrt{K_R{}^2-K^2}}{K_R{}^2-\frac{k^2}{2}}\right)e^{-iK_R x}
$$

$$
= -\,i\,\frac{\sqrt{K_R{}^2-K^2}\;k^2\;a}{2K^2\left(K_R{}^2-\frac{k^2}{2}\right)}\,e^{-iK_R x} \qquad ,
$$

$$
u_2/(i\,u_1) = \frac{\sqrt{K_R{}^2-K^2}\;K_R}{\left(K_R{}^2-\frac{k^2}{2}\right)} \qquad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(B}\cdot\text{6)}
$$

さて，ある断面を通じて x の正方向に伝わる単位時間のエネルギーは，

$$W_R = \frac{\rho\omega^3}{4ik^2}\int_0^\infty (u_1\bar{\tau}_1 + u_2\bar{\tau}_2 - \bar{u}_1\tau_1 - \bar{u}_2\tau_2)\,dy \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (B\cdot 7)$$

$$\begin{aligned} u_1\bar{\tau}_1 - \bar{u}_1\tau_1 + u_2\bar{\tau}_2 - \bar{u}_2\tau_2 &= 2(\bar{u}_1 u_2 - u_1\bar{u}_2)_y \\ &\quad + \frac{k^2}{K^2}(u_1\bar{\gamma} - \bar{u}_1\gamma) + (u_2\bar{\omega} - \omega\bar{u}_2) \\ &= 2(\bar{u}_1 u_2 - u_1\bar{u}_2)_y + \frac{k^2}{K^4}(\gamma\bar{\gamma}_x - \bar{\gamma}\gamma_x) + \frac{1}{k^2}(\omega\bar{\omega}_x - \bar{\omega}\omega_x) \\ &\quad + \frac{1}{K^2}(\bar{\gamma}\omega - \gamma\bar{\omega})_y \end{aligned}$$

であるから，

$$\frac{W_R}{\frac{\rho}{4}\omega^3 a\bar{a}} = \frac{K_R}{K^4\sqrt{K_R^2-K^2}}\left(1+\frac{K_R^2-K^2}{K_R^2-k^2}\right) - \frac{\sqrt{K_R^2-K^2}\,(2K_R^2+k^2)}{K^4 K_R\left(K_R^2-\frac{k^2}{2}\right)} \quad ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (B\cdot 8)$$

$$\frac{W_R}{\frac{\rho}{2}\omega^3\frac{a\bar{a}}{k^4}} = \alpha - \beta \quad ,$$

$$\alpha = \frac{K_R}{2\sqrt{K_R^2-K^2}}\left(1+\frac{K_R^2-K^2}{K_R^2-k^2}\right)\left(\frac{k}{K}\right)^4$$

$$\beta = \frac{\sqrt{K_R^2-K^2}\left(K_R^2+\frac{k^2}{2}\right)}{K_R\left(K_R^2-\frac{k^2}{2}\right)}\left(\frac{k}{K}\right)^4$$

$$\left.\begin{aligned} Q_{RK} &= \frac{W_{RK}}{\frac{\rho}{8}\omega^3\frac{|G|^2}{K^4}} = 2\times 4\left(\frac{K}{k}\right)^4(\alpha-\beta)\left(\frac{A'}{2}\right)^2 \\ Q_{Rk} &= \frac{W_{Rk}}{\frac{\rho}{8}\omega^3\frac{|F|^2}{k^4}} = 2\times 4(\alpha-\beta)\left(\frac{D'}{2}\right)^2 \end{aligned}\right\}$$

x の正負両方向の波があるから２倍 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (B\cdot 9)$

レーリー波と円筒発散波のエネルギーの比率を計算して見よう。

まず，無指向性の縦波のみあるとすると (6・3) を２つに別けて (B・9) の定義を使い，

$$\frac{W}{\frac{\rho}{8}\,\omega^3\,\frac{|G|^2}{K^4}} = Q_K = Q_{KK} + Q_{RK} \quad , \tag{B·10}$$

$$Q_{KK} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\, |\, 1 - iAK\sin\varphi\, |^2 + \left(\frac{k}{K}\right)^4 |\, Dk\sin\varphi\, |^2 \right] d\varphi \ , \tag{B·11}$$

横波のみとすると同様にして，

$$\frac{W}{\frac{\rho}{8}\,\omega^3\,\frac{|F|^2}{k^4}} = Q_k = Q_{kk} + Q_{kk} \quad , \tag{B·12}$$

$$Q_{kk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\, |\, 1 - iBk\sin\varphi\, |^2 + \left(\frac{K}{k}\right)^4 |\, CK\sin\varphi\, |^2 \right] d\varphi \ , \tag{B·13}$$

無限に拡がっている場合は $Q_K = Q_k = 1$ となる。

	$\nu=\frac{1}{2}$ $\sigma=1/3$	$\nu=1/3$ $\sigma=1/4$	
K_R	1.0724	1.0877	
K_R^2	1.1500	1.1830	
$\sqrt{K_R^2-k^2}/k$	.3873	.4278	
$\sqrt{K_R^2-K^2}/k$	.9487	.9218	
K^2/k^2	1/4	1/3	
Δ'/k^3	−1.5243	−1.2504	
$A'/2$	− .2922	− .4047	
$B'/2$	− .7157	− .8721	
$C'/2$	−1.8292	−1.7823	
$D'/2$	.1143	.1980	
C'/D'	16	9	
$-b/a=C'/A'=-B'/D'$	6.261	4.404	
B'/A'	2.4495	2.1547	
u_2/iu_1	1.5654	1.4678	
α	63.302	29.963	
β	35.927	18.794	
$\alpha-\beta$	27.375	11.169	
$(\alpha-\beta)\left(\frac{A'}{2}\right)^2$	2.3373	1.8293	
$(\alpha-\beta)\left(\frac{D'}{2}\right)^2$	.3576	.4379	
$(\alpha-\beta)\left(\frac{D'^2}{2}\right)\times 4\times 2$	2.8608 (73%)	3.5032 (77%)	Q_{Rk}
$(\alpha-\beta)\left(\frac{A'^2}{2}\right)\times 4\times\left(\frac{1}{16}\text{ or }\frac{2}{9}\right)$	1.1687 (56%)	1.6260 (68%)	Q_{RK}
	1.0336	1.0215	Q_{kk}
	.9097	.7650	Q_{KK}
	3.8944	4.5247	Q_k+Q_{Rk}
	2.0784	2.3910	Q_K+Q_{RK}

(K/k)**2 0.2500

N	Theta	$[1-iA_K\sin x]^2$	$[1-iB_k\sin x]^2$	$[C_k\ \sin x]^2$	$[D_K\ \sin x]^2$
1	0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2	3 00	0.02724	0.12888	0.00915	0.04276
3	6.00	0.08919	0.48529	0.03061	0.15880
4	9.00	0.16295	0.99348	0.05796	0.31741
5	12.00	0.23381	1.56465	0.08739	0.48276
6	15.00	0.29345	2.12462	0.11675	0.62513
7	18.00	0.33795	2.62535	0.14485	0.72563
8	21.00	0.36622	3.04332	0.17103	0.77560
9	24.00	0.37894	3.37264	0.19483	0.77382
10	27.00	0.37774	3.61798	0.21589	0.72372
11	30.00	0.36482	3.78947	0.23386	0.63158
12	33.00	0.34255	3.89974	0.24837	0.50579
13	36.00	0.31337	3.96228	0.25908	0.35728
14	39.00	0.27958	3.99088	0.26566	0.20175
15	42.00	0.24331	3.99928	0.26783	0.06544
16	45.00	0.20645	4.00000	0.26544	0.00000
17	48.00	0.17060	3.99864	0.25845	0.12337
18	51.00	0.13702	3.96652	0.24697	0.74110
19	54.00	0.10669	3.71611	0.23131	2.68901
20	57.00	0.08024	2.51146	0.21193	7.50921
21	60.00	0.05800	0.00000	0.18947	12.00000
22	63.00	0.04003	0.37988	0.16473	3.62690
23	66.00	0.02613	0.31796	0.13864	2.54395
24	69.00	0.01593	0.21607	0.11220	1.91067
25	72.00	0.00889	0.12830	0.08648	1.42288
26	75.00	0.00441	0.06619	0.06254	1.01236
27	78.00	0.00185	0.02848	0.04137	0.66475
28	81.00	0.00060	0.00934	0.02387	0.38248
29	84.00	0.00012	0.00189	0.01081	0.17295
30	87.00	0.00001	0.00012	0.00273	0.04371
31	90.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Q_K 0.76498

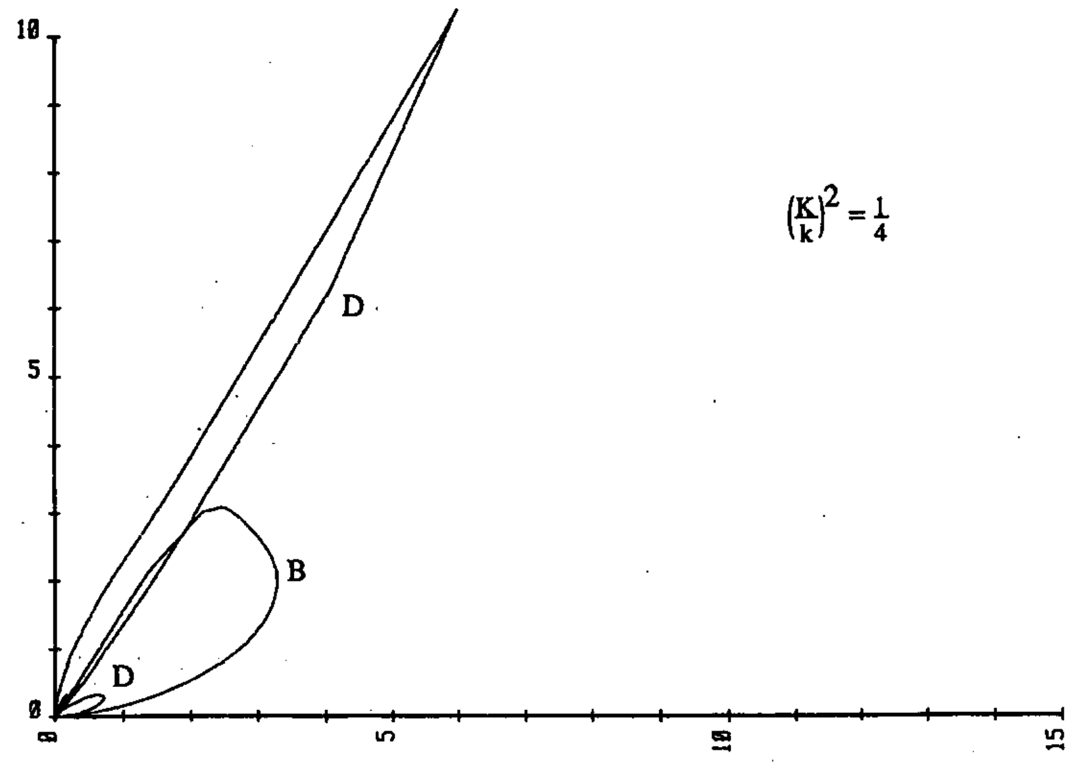
Q_k 1.02148

(K/k)** 2 0.3333

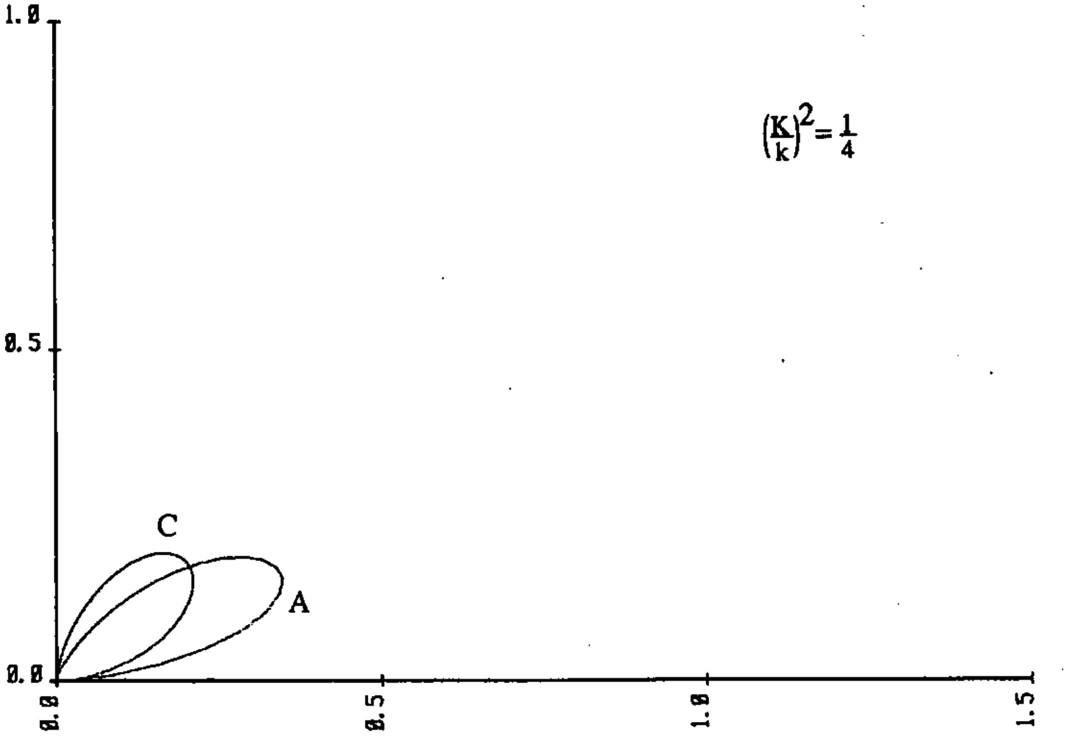
N	Theta	〔$1-iA_K \sin x$〕	〔$1-iB_k \sin x$〕	〔C_k $\sin x$〕	〔D_K $\sin x$〕
1	0.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2	3.00	0.20457	0.11492	0.02589	0.04292
3	6.00	0.51737	0.43655	0.06790	0.16100
4	9.00	0.77844	0.90519	0.10842	0.32673
5	12.00	0.96324	1.44690	0.14540	0.50610
6	15.00	1.07836	1.99467	0.17976	0.66844
7	18.00	1.13605	2.50000	0.21255	0.79180
8	21.00	1.14797	2.93465	0.24439	0.86370
9	24.00	1.12398	3.28694	0.27540	0.87954
10	27.00	1.07234	3.55652	0.30527	0.84015
11	30.00	1.00000	3.75000	0.33333	0.75000
12	33.00	0.91298	3.87785	0.35868	0.61621
13	36.00	0.81654	3.95261	0.38023	0.44888
14	39.00	0.71534	3.98809	0.39689	0.26369
15	42.00	0.61342	3.99900	0.40759	0.09035
16	45.00	0.51429	4.00000	0.41143	0.00000
17	48.00	0.42083	3.99764	0.40777	0.21318
18	51.00	0.33532	3.92288	0.39627	1.70693
19	54.00	0.25939	2.50000	0.37699	14.20820
20	57.00	0.19404	1.14658	0.35041	4.35579
21	60.00	0.13965	1.00000	0.31738	3.00000
22	63.00	0.09603	0.74406	0.27918	2.45084
23	66.00	0.06250	0.50748	0.23740	2.04505
24	69.00	0.03801	0.31849	0.19387	1.67098
25	72.00	0.02117	0.18151	0.15058	1.30770
26	75.00	0.01049	0.09141	0.10959	0.96067
27	78.00	0.00439	0.03874	0.07288	0.64453
28	81.00	0.00141	0.01258	0.04223	0.37626
29	84.00	0.00028	0.00253	0.01917	0.17175
30	87.00	0.00002	0.00016	0.00485	0.04363
31	90.00	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

Q_K 0.90972

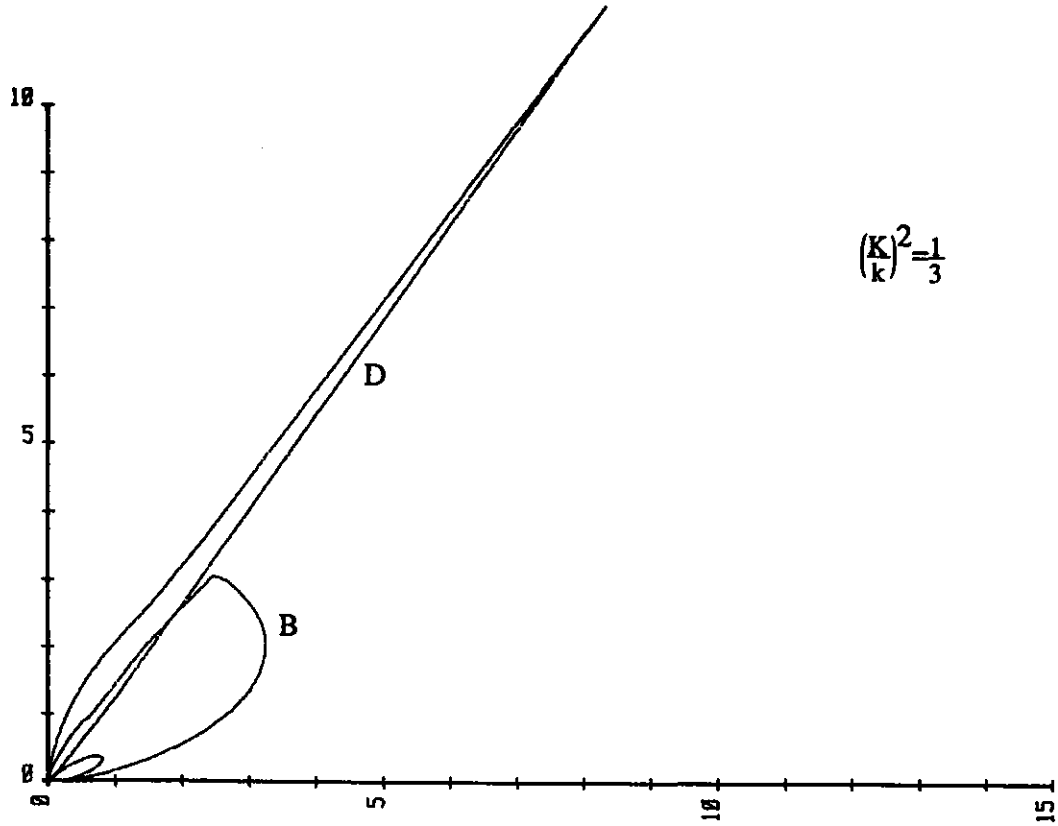
Q_k 1.03366

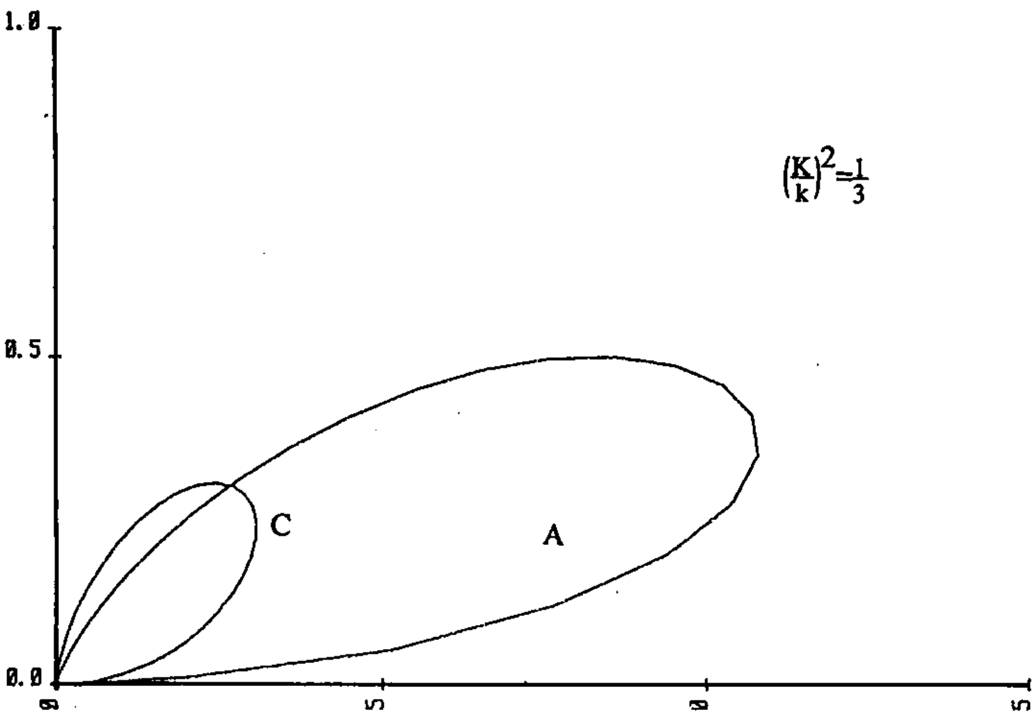


10
5
0
0
5
10
15
D
B
D
$\left(\frac{K}{k}\right)^2 = \frac{1}{4}$



1.0
0.5
0.0
0.0
0.5
1.0
1.5
C
A
$\left(\frac{K}{k}\right)^2 = \frac{1}{4}$


10
5
0
0
5
10
15
D
B
$\left(\frac{K}{k}\right)^2 = \frac{1}{3}$


1.0
0.5
0.0
0.0
0.5
1.0
1.5
C
A
$\left(\frac{K}{k}\right)^2 = \frac{1}{3}$

附録C　コッチン関数

(4・1)に(1・2)，(1・5)，(1・8)，(1・10)を代入して部分積分すると，

まず，

$$G(p)=\int_C\left[-K^2\left(u_1\frac{\partial x}{\partial n}+u_2\frac{\partial y}{\partial n}\right)E-\frac{K^2}{k^2}\omega\left(\frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial E}{\partial y}\right)\right.$$

$$\left.-r\left(\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial E}{\partial y}\right)\right]ds\ ,$$

$$r\frac{\partial x}{\partial n}-\frac{K^2}{k^2}\omega\frac{\partial y}{\partial n}=\frac{K^2}{k^2}\left(\tau_1+2\frac{\partial u_2}{\partial s}\right)$$

$$r\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{K^2}{k^2}\omega\frac{\partial x}{\partial n}=\frac{K^2}{k^2}\left(\tau_2-2\frac{\partial n_1}{\partial s}\right)$$

$$G(p)=\frac{K^2}{k^2}\int_C\left[-k^2\left(u_1\frac{\partial x}{\partial n}+u_2\frac{\partial y}{\partial n}\right)E-\left(\tau_1+2\frac{\partial u_2}{\partial s}\right)E_x-\left(\tau_2-2\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)E_y\right]ds$$

$$=\frac{K^2}{k^2}\int_C\left[-\tau_1E_x-\tau_2E_y+u_1\left(2E_{xs}-k^2\frac{\partial x}{\partial n}E\right)+u_2\left(-2E_{ys}-k^2\frac{\partial y}{\partial n}E\right)\right]ds,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (\mathrm{C}\cdot 1)$$

$$E=e^{ipx-\sqrt{p^2-k^2}y}\ ,$$

$$F(p)=\int_C\left[-k^2\left(u_1\frac{\partial x}{\partial s}+u_2\frac{\partial y}{\partial s}\right)E'+\frac{k^2}{K^2}r\left(\frac{\partial x}{\partial s}E'_x+\frac{\partial y}{\partial s}E'_y\right)\right.$$

$$\left.-\omega\left(\frac{\partial x}{\partial n}E'_x+\frac{\partial y}{\partial n}E'_y\right)\right]ds$$

$$=\int_C\left[-k^2\left(u_1\frac{\partial x}{\partial s}+u_2\frac{\partial y}{\partial s}\right)E'+\left(\tau_1+2\frac{\partial y}{\partial s}\right)E'_y-\left(\tau_2-2\frac{\partial u_1}{\partial s}\right)E'_x\right]ds$$

$$=\int_C\left[\tau_1E'_y-\tau_2E'_x+u_1\left(+k^2\frac{\partial y}{\partial n}E'-2E'_{xs}\right)\right.$$

$$\left.+u_2\left(-k^2\frac{\partial x}{\partial n}E'-2E'_{ys}\right)\right]ds\ ,\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (\mathrm{C}\cdot 2)$$

G^*, F^*についても同様である。

Cが自由表面の一部である時は(3・13)に対応して u_1，u_2 の項はなくなり，

$$G(p)=\frac{+K^2}{k^2}\int_{-1}^{1}(\tau_1 E_x+\tau_2 E_y)\,dx\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(C・3)}$$

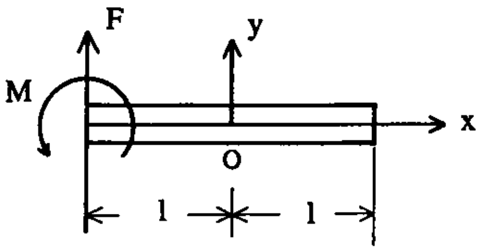
$$F(p)=\int_{-1}^{1}(\tau_2 E'_x-\tau_1 E'_y)\,dx\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(C・4)}$$

$$E=e^{ipx-\sqrt{p^2-K^2}\,y}\ ,\qquad E'=e^{ipx-\sqrt{p^2-k^2}\,y}\ ,$$

等となる。

附録D　一様梁のイムピーダンス

右図のように一端自由で他端が上下方向に円周波数ω，振幅ηで，傾斜角がθで振動している時，その剪断力はF，モーメントがMであるとしよう。



振動方程式はよく知られているようにyを撓みとすると，

$$EI\frac{d^4y(x)}{dx^4}-\frac{w}{g}\omega^2 y(x)=0\ ,$$

………………　(D・1)

但し，Iは断面2次モーメント，Eはヤング率，wは単位長さの重量である。

この解は，

$$y(x)=C_1\ \mathrm{sh}\,\alpha\xi+C_2\ \mathrm{ch}\,\alpha\xi+C_3\ \sin\alpha\xi+C_4\ \cos\alpha\xi\ ,\qquad \cdots\cdots\ (\mathrm{D}\cdot 2)$$

但し，$\alpha=\sqrt[4]{\dfrac{w\,\omega^2\ell^4}{EIg}}\ ,$

$$\xi=x/\ell \qquad \cdots\cdots\cdots\ (\mathrm{D}\cdot 3)$$

先ず，

$$\eta=y(-\ell)=-C_1\ \mathrm{sh}\,\alpha+C_2\ \mathrm{ch}\,\alpha-C_3\ \sin\alpha+C_4\ \cos\alpha\ ,$$

$$\theta=\frac{dy(-\ell)}{dx}=\frac{1}{\ell}\frac{dy}{d\xi}\bigg|_{-\ell}=\frac{\alpha}{\ell}\left[C_1\ \mathrm{ch}\,\alpha-C_2\ \mathrm{sh}\,\alpha+C_3\ \cos\alpha-C_4\ \sin\alpha\right],$$

………………　(D・4)

他端は自由であるから，

$$\left.\begin{aligned}C_1\ \mathrm{sh}\,\alpha+C_2\ \mathrm{ch}\,\alpha-C_3\ \sin\alpha-C_4\ \cos\alpha=0\ ,\\ C_1\ \mathrm{ch}\,\alpha+C_2\ \mathrm{sh}\,\alpha-C_3\ \cos\alpha+C_4\ \sin\alpha=0\ ,\end{aligned}\right\}\qquad \cdots\cdots\ (\mathrm{D}\cdot 5)$$

この4つの式を辺々加減して，

$$\left.\begin{aligned}&\left.\begin{aligned}-2C_1\ \mathrm{sh}\,\alpha+2C_4\ \cos\alpha&=\eta\\ 2C_1\ \mathrm{ch}\,\alpha+2C_4\ \sin\alpha&=\ell\theta/\alpha\end{aligned}\right\}\\ &\left.\begin{aligned}2C_2\ \mathrm{ch}\,\alpha-2C_3\ \sin\alpha&=\eta\\ -2C_2\ \mathrm{sh}\,\alpha+2C_3\ \cos\alpha&=\ell\theta/\alpha\end{aligned}\right\}\end{aligned}\right\}\qquad \cdots\cdots\ (\mathrm{D}\cdot 6)$$

これから直ちに，

$$C_1 = \frac{1}{2\Delta_1}\left(-\eta \sin \alpha + \frac{\ell\theta}{\alpha}\cos \alpha\right)$$

$$C_2 = \frac{1}{2\Delta_2}\left(\eta \cos \alpha + \frac{\ell\theta}{\alpha}\sin \alpha\right)$$

$$C_3 = \frac{1}{2\Delta_2}\left(\eta\, \mathrm{sh}\, \alpha + \frac{\ell\theta}{\alpha}\mathrm{ch}\, \alpha\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{D}\cdot 7)$$

$$C_4 = \frac{1}{2\Delta_1}\left(\eta\, \mathrm{ch}\, \alpha + \frac{\ell\theta}{\alpha}\mathrm{sh}\, \alpha\right)$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1 &= \mathrm{ch}\,\alpha \cos\alpha + \mathrm{sh}\,\alpha \sin\alpha \\ \Delta_2 &= \mathrm{ch}\,\alpha \cos\alpha - \mathrm{sh}\,\alpha \sin\alpha\end{aligned}\right. \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{D}\cdot 8)$$

それ故，

$$M = EI\frac{d^2y}{dx^2}\bigg|_{x=-\ell} = \frac{EI}{\ell^2}\,\frac{d^2y}{d\xi^2}\bigg|_{\xi=-\ell}$$

$$= \frac{EI\alpha^2}{\ell^2}\left[-C_1\,\mathrm{sh}\,\alpha + C_2\,\mathrm{ch}\,\alpha + C_3 \sin\alpha - C_4\cos\alpha\right]$$

$$F = EI\frac{d^3y}{dx^3}\bigg|_{x=-\ell} = \frac{EI}{\ell^3}\,\alpha^3\left[C_1\,\mathrm{ch}\,\alpha - C_2\,\mathrm{sh}\,\alpha - C_3\cos\alpha - C_4\sin\alpha\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{D}\cdot 9)$$

(D・7) を代入して整理すると，

$$M = \frac{EI\alpha^2}{2\ell^2\Delta_1\Delta_2}\left[\eta\,\mathrm{sh}\,2\alpha\sin 2\alpha + \frac{\ell\theta}{\alpha}\left(\mathrm{ch}\,2\alpha\sin 2\alpha - \mathrm{sh}\,2\alpha\cos 2\alpha\right)\right],$$

$$F = \frac{-EI\alpha^3}{2\ell^3\Delta_1\Delta_2}\left[\eta\left(\mathrm{sh}\,2\alpha\cos 2\alpha + \mathrm{ch}\,2\alpha\sin 2\alpha\right) + \frac{\ell\theta}{\alpha}\,\mathrm{sh}\,2\alpha\sin 2\alpha\right],$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{D}\cdot 10)$$

それ故，今

$$\left.\begin{aligned}F &= i\omega\eta Z_{11}^{(i)} + i\omega\ell Z_{13}^{(i)} \\ M &= -i\omega\eta Z_{31}^{(i)} - i\omega\theta Z_{33}^{(i)}\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\mathrm{D}\cdot 11)$$

のようにイムピーダンスを定義すると，

$$Z_{11}^{(i)}=\frac{1}{\omega}\ \frac{EI\ a^3}{2\ell^3}\left(\frac{\mathrm{sh}\,2a\cos 2a+\mathrm{ch}\,2a\sin 2a}{\Delta_1\ \Delta_2}\right)\quad,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (D\cdot 12)$$

$$Z_{13}^{(i)}=\frac{1}{\omega}\ \frac{EI\ a^2}{2\ell^2\Delta_1\Delta_2}\ \mathrm{sh}\,2a\sin 2a\quad,$$

$$Z_{31}^{(i)}=+\frac{i\ EI\ a^2}{\omega\cdot 2\ell^2\Delta_1\ \Delta_2}\ \mathrm{sh}\,2a\sin 2a=Z_{13}^{(i)}\quad,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (D\cdot 13)$$

$$Z_{33}^{(i)}=+\frac{i\ EI\ a}{2\omega\ell\Delta_1\Delta_2}\left(\mathrm{ch}\,2a\sin 2a-\mathrm{sh}\,2a\cos 2a\right)\quad,$$

$\omega\to 0$ とすると，

$$Z_{11}^{(i)}\doteqdot\frac{2i}{\omega}\ \frac{EI\ a^4}{\ell^3}=\frac{2i}{\omega}\ \frac{\ell w}{g}\ \omega^2=\frac{i\omega}{g}\left(2w\ell\right)\quad,$$

$$Z_{33}^{(i)}\doteqdot+\frac{i\ EI\ a}{\omega\ell}\times\frac{4}{3}a^3=+i\omega\frac{4}{3}\ \frac{w\ell^3}{g}\quad,\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ (D\cdot 14)$$

$$Z_{13}^{(i)}=+\ Z_{31}\doteqdot\frac{2i}{\omega}\ \frac{EI\ a^4}{\ell^2}=\frac{2i\omega}{g}\left(w\ell^2\right)\quad,$$

となって慣性力に一致する。