水波理論の要約

1983. 3. 17　別所正利

内容目次

概　要

コーシー・ポアッソン以来の水波理論の歴史は長いけれどその工学的応用の歴史は比較的浅く，また今日の隆盛を見るには電算機の出現をまたねばならなかった。

しかもその大容量化は実験解析法への応用と共に従来は主として周波数領域での計算に止まっていたものが，非線型時間領域への試行をうながしているように見える。

従来の教科書は理論の全領域を網羅しているけれども既にかなり年を経ており，また最近のものは数値計算法に重味がおかれ，理論の全体的構成において今一歩の整正さが望まれる。

本要約では理論全体の構成と整一性を主として，２次元浮体の動揺問題に限るが，しかし周波数領域と平行に時間領域の理論の要約を試みる。

そのために先ず両領域間の変換とハミルトンの最小作用の原理から説き起す事にする。

それぞれの領域の理論では先ず基本特異性を導入し，それによる速度ポテンシャルの表現の種々の型を誘導する。それはまた境界積分方程式の種々の型に直接結びつく。

次に力およびモーメントあるいは一般力はラグランジアンである事とその可逆性を示し，また浮体のなす仕事との関連を導く。

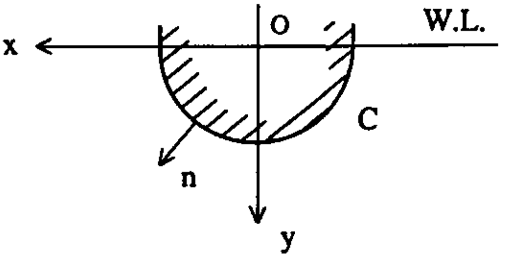
このラグランジアンは前出のハミルトンの原理にも現われた訳でまた境界値問題あるいは固有値問題の変分原理における汎関数とする事が出来る。

その他，解の一意性その他応用上有用と思われる項目についても触れる事とする。

1. 序　論

1.1　時間領域の問題の定式化

右図のように座標系をとって２次元筒体 C の運動を考えよう。



速度ポテンシャルを ϕ とし速度 u，v は，

$$(u, v) = -\nabla\phi(x, y, t), \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot1\cdot1)$$

のように定義するとベルヌーイの定理より，２次の項を省略すると圧力 p は，

$$\frac{1}{\rho}\, p(x, y, t) = \frac{\partial\phi}{\partial t} + gy \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot1\cdot2)$$

水面変位を η とすると水面では，

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(x, 0, t) - g\eta(x, t) = 0 \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot1\cdot3)$$

一方，水面の上向き速度は，

$$\frac{\partial}{\partial t}\eta(x, t) = -\frac{\partial}{\partial y}\phi(x, 0, t) \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot1\cdot4)$$

上の２式から η を消去するとよく知られた水面条件が得られる。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi(x, 0, t) + g\frac{\partial}{\partial y}\phi(x, 0, t) = 0 \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot1\cdot5)$$

の下に ϕ を求める事である。

初期条件は $t = 0$ まで，

$$\phi(x, y, t) = \frac{\partial\phi}{\partial t}(x, y, t) = 0 \quad \text{for} \quad t < 0 \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot1\cdot6)$$

境界条件は，

$$\frac{\partial}{\partial n}\phi(x, y, t) = -\dot{a}_j \frac{\partial x_j}{\partial n} \ , \quad \text{on} \quad C \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot1\cdot7)$$

左右ゆれに対し $j = 1$，　$\dfrac{\partial x_1}{\partial n} \equiv \dfrac{\partial x}{\partial n}$

上下ゆれに対し $j = 2$，　$\dfrac{\partial x_2}{\partial n} \equiv \dfrac{\partial y}{\partial n}$　　$\cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot1\cdot8)$

横ゆれ（原点まわり）に対し $j = 3$，　$\dfrac{\partial x_3}{\partial n} \equiv x\dfrac{\partial y}{\partial n} - y\dfrac{\partial x}{\partial n}$

$\dot{a}_j$ は夫々の運動の速度とする。

このような解が一義的に定まる事はJ. J. Stoker による証明がある。

一般にこのように波のある問題ではどのような波の存在をゆるすかを指定しなければ問題は不定となり後出のSommerfeldの放射条件はその例であるが今の場合，それに対応する条件は初期条件(1・1・6)である。

1.2 周波数領域の問題の定式化

一般に前節の時間領域で境界値問題をとくのは容易でなく，ラプラス変換又はフーリエ変換を行ってから問題を解くのが普通である。

この場合はフーリエ変換を行った方が物理的像が明白で，つまりすべての運動が調和振動をしている事に対応していて便利である。

そこでまずフーリエ変換を次のように定義しよう。

任意の時間関数 $f(t)$ ($=0$ for $t<0$)について，

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)\ e^{-i\omega t} dt \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot2\cdot1)$$

でフーリエ変換 $F(\omega)$ を定義すると逆に，

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\ e^{i\omega t} d\omega \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot2\cdot3)$$

$f(t)$は一般に実関数であるから(1・2・1)から

$$\overline{F}(\omega) = F(-\omega) \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot2\cdot4)$$

また， $f(t) = 0 \quad \text{for} \quad t<0 \ ,$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (1・2・5)

と仮定したから(1・2・3)と合せて，考えるとこれは複素 ω 一面で $F(\omega)$は下半面で正則である事を意味している。

なお，言うまでもないが $i\omega$ を s とおけばラプラス変換となる。前節の式をフーリエ変換して，先ず圧力 $P(x,y,\omega)$ は ϕ のフーリエ変換を Φ として，

$$\frac{1}{\rho} P(x,y,\omega) = i\omega\Phi(x,y,\omega) \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot2\cdot6)$$

((1・1・2)の y は時間の関数ではない。)

$$i\omega\Phi(x,0,\omega) - gY(x,\omega) = 0 \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot2\cdot7)$$

(1・1・4)は

$$i\omega Y(x,\omega) = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,0,\omega) \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot2\cdot8)$$

(1・1・5)は

$$-\omega^2 \Phi(x,0,\omega) - g\frac{\partial}{\partial y}\Phi(x,0,\omega) = 0 \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot2\cdot9)$$

水深が無限とすると，

$$\frac{\omega^2}{g} = K = {}^{2\pi}\!/_{\lambda} \quad , \qquad \lambda\,;\text{波長} \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot2\cdot10)$$

とおいて上式は

$$K\Phi(x,0,\omega) + \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,0,\omega) = 0 \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot2\cdot11)$$

となる。

境界条件は，

$$\frac{\partial}{\partial n}\Phi(x,y,\omega) = -U_j(\omega)\frac{\partial x_j}{\partial n} \quad , \quad \text{on} \quad C \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot2\cdot12)$$

$$U_j(\omega) = \int_0^{\infty} \dot{a}_j \; e^{-i\omega t} dt \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot2\cdot13)$$

$\dot{a}_j$ ，x_j は(1・1・8)による。

前節の初期条件(1・1・6)に対応するものが欠けていては問題が不定となる。
それはよく知られているSommerfeldの放射条件であって，物理的には物体が波を外側へ放射する条件である。それについては次章でのべる。

このような境界値問題の解が一義的に定まるかどうかについては一部疑問が残っており後述する。さて，実際上はこの形で境界値問題が解かれて実用に供されている訳であるが，これが解かれていれば前節の問題もそれを逆変換すれば良い訳で(1・2・3)により速度ポテンシャルは，

$$\phi(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x,y,\omega)\, e^{i\omega t} d\omega \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot2\cdot14)$$

のように与えられる。

実際上は(1・2・12)の境界値問題は各要素運動に対して解かれ，

$$\frac{\partial}{\partial n}\Phi_j(x,y,\omega) = -\frac{\partial x_j}{\partial n}, \quad \text{on} \quad C \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot2\cdot15)$$

とするので上式は，

$$\phi(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U_j(\omega)\;\Phi_j(x,y,\omega)\, e^{i\omega t} d\omega \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot2\cdot16)$$

の形となる。

それ故，今

$$\phi_j^{\delta}(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_j(x,y,\omega)\; e^{i\omega t} d\omega \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot2\cdot17)$$

とおくと(1・2・13)と合せて(1・2・16)は，

$$\phi(x,y,t)=\int_0^t \dot{a}(\tau)\ \phi_j^{\delta}(x,y,t-\tau)\ d\tau \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1\cdot2\cdot18)$$

と表わされる。

ここに ϕ_j^{δ} の境界条件は(1・2・15)により(1・2・17)から

$$\frac{\partial}{\partial n}\phi_j^{\delta}(x,y,t) = -\frac{\partial x_j}{\partial n}\delta(t) \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1\cdot2\cdot19)$$

ここに

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t}d\omega \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1\cdot2\cdot20)$$

はDiracのδ関数である。

即ち ϕ_j^{δ} は $t=0$ でインパルス的に動く時の速度ポテンシャルである。

即ち結局の所(1・1・7)の境界問題は(1・2・19)のインパルスポテンシャルから(1・2・18)のように表される訳で ϕ_j^{δ} を求めるには(1・2・17)からわかるように $\Phi_j(\omega)$ がわかればよい。

しかし $\Phi_j(\omega)$ がすべての周波数で求める事は大変困難な事である。

一方実験的には $\phi_j^{\delta}(t)$ を求めるのは簡単で，それをフーリエ変換すれば $\Phi_j(x,y,\omega)$ が求められて実用的試験法となっている。

なお，フーリエ変換で，

$$U(\omega)=\int_0^{\infty}\dot{a}(t)\,e^{-i\omega t}dt = -a(0)+i\omega\int_0^{\infty}a(t)\,e^{-i\omega t}dt \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1\cdot2\cdot21)$$

のように初期値が残る点に注意すべきである。

速度ポテンシャルについては(1・1・6)を仮定するのでその心配はない。

1.3 力とモーメント

時間領域で物体に働く力あるいはモーメントは，

圧力pは，

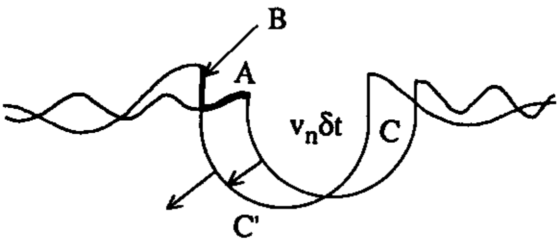
$$\frac{p}{\rho}=\frac{\partial}{\partial t}\phi(x,y,t)-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+gy \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1\cdot3\cdot1)$$

であるから，力は

$$X_j=-\int_C p\frac{\partial x_j}{\partial n}ds \ , \quad j=1,\ 2, \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1\cdot3\cdot2)$$

モーメントは

$$M=-\int_C p\left(x\frac{\partial y}{\partial n}-y\frac{\partial x}{\partial n}\right)ds \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1\cdot3\cdot3)$$



先ず

$$\frac{d}{dt}\int_C \phi\,\frac{\partial x_j}{\partial n}\,ds \quad , \qquad \frac{d}{dt}\int_C \phi\,(\,x\frac{\partial y}{\partial n} - y\,\frac{\partial x}{\partial n})\;ds \;,$$

なる積分を考えよう。

$$\frac{d}{dt}\int_C \phi\,\frac{\partial x_j}{\partial n}\,ds = \frac{1}{dt}\Big[\int_{C'}\phi'\frac{\partial x_j}{\partial n}\,ds - \int_C \phi'\,\frac{\partial x_j}{\partial n}ds\,\Big]$$

たゞし

$$\phi' = \phi + \frac{\partial\phi}{\partial t}\,\delta t \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot3\cdot4)$$

$$\int_{C'}\phi'\frac{\partial x_j}{\partial n}\,ds - \int_{A+B}\phi'\frac{\partial x_j}{\partial n}ds = \int_C \phi'\frac{\partial x_j}{\partial n}\,ds + \delta t\int_C \frac{\partial\phi'}{\partial x_j}\;v_n\;ds \;, \qquad (1\cdot3\cdot5)$$

$$v_n = -\frac{\partial\phi}{\partial n} \quad ,$$

$$\int_{A+B}\phi'\frac{\partial x_j}{\partial n}\,ds \doteqdot \phi\int_{A+B}\frac{\partial x_j}{\partial n}\,ds = [\,\phi\;\dot{\eta}\,]\,\delta t \;,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot3\cdot6)$$

$$\int_{A+B}\phi'\frac{\partial y}{\partial n}\,ds \doteqdot \phi\int_{A+B}\frac{\partial y}{\partial n}\,ds = -[\,\phi\;v_x\,]\,\delta t \quad ,$$

v_x ; x 方向速度

それ故 (1・3・1) の項を高次として無視出来るとすると，

$$\frac{d}{dt}\int_C \phi\,\frac{\partial x_j}{\partial n}\,ds = \int_C \frac{\partial\phi}{\partial t}\,\frac{\partial x_j}{\partial n}\,ds - \int_C \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\,\frac{\partial\phi}{\partial n}ds \quad , \qquad \cdots\cdots (1\cdot3\cdot7)$$

同様にして

$$\frac{d}{dt}\int_C \phi\left(x\frac{\partial y}{\partial n}-y\frac{\partial x}{\partial n}\right)ds=\int_C\frac{\partial\phi}{dt}\left(x\frac{\partial y}{\partial n}-y\frac{\partial x}{\partial n}\right)ds-\int_C\left(x\frac{\partial\phi}{\partial y}-y\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\frac{\partial\phi}{\partial n}ds,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1\cdot3\cdot8)$$

これを(1・3・2)，(1・3・3)に代入すると，

$$X_j=-\frac{d}{dt}\int_C\phi\frac{\partial x_j}{\partial n}ds+\int_C\left[\frac{1}{2}q^2\frac{2\partial x_j}{\partial n}-\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]ds-g\int_C y\frac{\partial x_j}{\partial n}ds\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1\cdot3\cdot9)$$

$$M=-\frac{d}{dt}\int_C\phi\left(x\frac{\partial y}{\partial n}-y\frac{\partial x}{\partial n}\right)ds+\int_C\left[\frac{q^2}{2}\left(x\frac{\partial y}{\partial n}-g\frac{\partial x}{\partial n}\right)-\left(x\frac{\partial\phi}{\partial y}-y\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]ds\ ,$$

$$-g\int_C y\left(x\frac{\partial y}{\partial n}-y\frac{\partial x}{\partial n}\right)ds\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1\cdot3\cdot10)$$

線型理論では右辺第１項は周期的力を与え第２項は定常力と倍周波数成分を与え，第３項は静水圧成分である。

第２項の積分は水面を切る点を両端とする任意の曲線上に積分しても値は変らない。

特に没水体では特異点のまわりの積分に変換して所謂定常問題でLagalleyの公式と呼ばれるものをうる。

今，ϕは吹出しσで表わされるとすると，

$$L_j=\int_C\left[\frac{1}{2}q^2\frac{\partial x_j}{\partial n}-\frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]ds=\int_C\sigma\frac{\partial\phi}{\partial x_j}ds\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1\cdot3\cdot11)$$

となる。

水面を切る物体ではこれは成立たない。

このように浮体では力についても大変問題が複雑で，例えば(1・3・6)の第１式は浸水面の変化に関係するなど考慮に入れねばならず非線型問題は言う迄もなく，それらの量が線型問題にも関係する場合がある。

1.4　ラグランジアンとハミルトンの原理

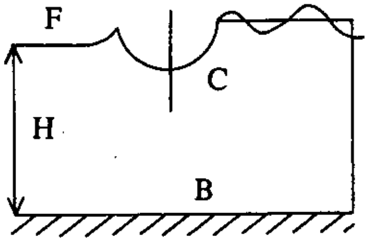
今，領域Dで圧力を積分しよう。

$$L=-\iint_D p\,dxdy=-\rho\iint_D\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+gy\right]dxdy\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1\cdot4\cdot1)$$

先ず

$$\iint_D y\,dxdy=\int_{C+F}\frac{\eta^2}{2}dx-\frac{H^2}{2}\int_B dx\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1\cdot4\cdot2)$$

右辺第２項は定数であるから以後無視しよう。
右辺第１項はポテンシャルエネルギーVである。



$$\left.\begin{aligned} \frac{\rho g}{2}\int_F \eta^2\,dx &= V_W \\ \frac{\rho g}{2}\int_C \eta^2\,dx &= V_S \end{aligned}\right\} V = V_W + V_S$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1\cdot4\cdot3)$$

（V_Sは横ゆれではdynamic stability ）

次に前同様にして

$$\frac{d}{dt}\iint_D \phi\,dxdy = \iint_D \frac{\partial\phi}{\partial t}\,dxdy + \int_{C+F} \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\,ds\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1\cdot4\cdot4)$$

なる関係があり，また運動エネルギーは，

$$T = \frac{\rho}{2}\iint_D (\nabla\phi)^2\,dxdy = \frac{-\rho}{2}\int_{C+F}\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\,ds\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1\cdot4\cdot5)$$

であるから，結局(1・4・1)

$$L = T - V\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1\cdot4\cdot6)$$

これはラグランジアンもしくはKinetic Potentialと呼ばれる量である。

(1・4・1)において水面変位ηが$\varDelta\eta$だけがわれば，

$$\delta L = -\int_F p\,\delta\eta\,dx\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1\cdot4\cdot7)$$

となるから，任意の$\delta\eta$に対して，

$$\delta L = 0$$

となるように速度ポテンシャルを定めれば上式から

$$p = 0 \quad \text{on} \quad F\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1\cdot4\cdot8)$$

となって自由表面条件が得られる。

この方法は非線型の場合にも使用出来る。線型化すれば(1・1・3)により（V_Sを除いて）

$$L_W = T - V_W = \frac{\rho}{2}\int_F \left(\phi\frac{\partial\phi}{\partial y} - g\eta^2\right)dx - \frac{\rho}{2}\int_C \phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\,ds\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (1\cdot4\cdot9)$$

右辺第１項の積分を更に時間で積分すれば，

$$\frac{\rho}{2}\int_0^t dt\int_F\left(\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}-g\eta^2\right)dx=\frac{\rho}{2}\int_0^t dt\int_F\left\{\left(\phi\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2\right\}dx$$

$$=\frac{\rho}{2g}\left[\int_F\phi\frac{\partial\phi}{\partial t}dx\right]_{t=0}^{t=t}+\frac{\rho}{2}\int_0^t dt\int_F\phi\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\right)dx\quad,$$

…………(1・4・10)

となって(1・1・5)と初期条件により（$t\to\infty$でもϕ or $\phi_t=0$として）上式は0となるので結局，

$$\int_0^\infty L_W\,dt=-\frac{\rho}{2}\int_0^\infty dt\int_F\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\,ds\quad,\qquad\text{…………(1・4・11)}$$

となりC上の値のみで決まる事になる。

これをフーリエ変換面で考えるとプランシュレルの定理により，

$$\int_0^\infty L_W\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \mathscr{L}_W(\omega)\,d\omega\quad,\qquad\text{…………(1・4・12)}$$

$$\mathscr{L}_W(\omega)=-\frac{\rho}{2}\int_C\Phi(\omega)\frac{\partial}{\partial n}\overline{\Phi}(\omega)\,ds\quad,\qquad\text{…………(1・4・13)}$$

となる。

これは水面条件(1・2・7)，(1・2・8)より，

$$\mathscr{L}_W=\frac{\rho}{2}\iint_D\nabla\Phi\nabla\overline{\Phi}\,dx\,dy-\frac{\rho g}{2}\int_C|Y(\omega)|^2\,dx\quad,\qquad\text{…………(1・4・14)}$$

となり，やはり運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差となっているのでこれもラグランジアンと呼ぼう。

波がある場合一般には$T\to\infty$，$V_W\to\infty$であるがその差は少くとも線型理論では有限なので$\mathscr{L}_W$は存在すると考えられる。

ハミルトンの最小作用の原理によれば，このラグランジアン外力のなす仕事の和の時間積分（ハミルトニアン）の変分が0になるように運動が起きる。

その条件は，

$$\int_0^{t\to\infty}(\delta L+A)\,dt=0\quad,\qquad\text{…………(1・4・15)}$$

こゝに，

$$A=\sum_j f_j\,\delta x_j\quad,\qquad\text{…………(1・4・16)}$$

は仮想仕事で，x_jは仮想変位，f_jはそのモードの一般力である。

以下簡単の為に周波数面で考えωの運動だけあるとすると(1・4・12)と同様とすれば(1・4・15)は周波数面では，

$$\delta \mathscr{L} + a = 0 \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot4\cdot16)$$

$$\mathscr{L} = -\frac{\rho}{2} \int_C \Phi(\omega) \frac{\partial \overline{\Phi(\omega)}}{\partial n} ds - \frac{\rho g}{2} \int_C |Y(\omega)|^2 dx \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot4\cdot17)$$

$$a = \frac{1}{2} \quad \Sigma\,(\, F_j\,(\omega) \quad \overline{X_j}\,(\omega) + \overline{F_j} \;\; X_j \,) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot4\cdot18)$$

$$X_j\,(\omega) = \int_0^\infty \delta\, x_j\; e^{-i\omega t} dt \quad ,$$

今例として上下ゆれを考えよう。

(1・2・16)，(1・2・21)により，

$$\Phi(\omega) = i\,\omega\, X_2\, \Phi_2\,(\omega)$$

であるから，

$$\mathscr{L} = \omega^2\, X_2\, \overline{X_2}\, \mathscr{L}_2 - \frac{\rho g}{2}\; X_2\; \overline{X_2}\;\; B \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot4\cdot19)$$

（こゝに$Y(\omega) = y + X_2\,(\omega)$で$y$は時間に関係ないので省略した。）

$$\mathscr{L}_2 = -\frac{\rho}{2} \int_C \Phi_2 \frac{\partial \overline{\Phi_2}}{\partial n}\; ds \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot4\cdot20)$$

となるので(1・4・16)から任意の$\overline{X_2}$に対して同式が成立するには，

$$\omega^2\, \mathscr{L}_2 \; - \frac{\rho g}{2} B + \frac{1}{2} \;\; F_j\,(\omega) = 0 \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot4\cdot21)$$

つまり，

$$F_j(\omega) = -\,\rho\,\omega^2 \int_C \Phi \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial n} ds + \rho\, g\, B \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot4\cdot22)$$

でなければならない。

この右辺第１項は(1・3・9)の右辺第１項のフーリエ変換に等しく，第２項は静的復原力である。(1・4・21)は力がラグランジアンで表わされる事を示しているが，問題が複雑になった場合，これによる方法は力学的に妥当な値を与えると考えられる。

同様に浮体の運動と同時に振動をとり扱おうとすると問題が複雑で困難となるがハミルトンの原理を使うこの方法では誤りが少ない。

その場合は L_W 又は$\mathscr{L}$に物体自体のラグランジアンを加えておけば容易に運動方程式が導びける。

2. 周波数領域の理論

1.2節に引続いて周波数領域の理論を構成する。なお簡単の為に速度ポテンシャル等は小文字で表わして周波数面の値を示すものとする。

2.1 基本特異性

水面下$Q(x', y')$の点にある単位吹出しによる速度ポテンシャルは，

$$S(P,Q)=\frac{1}{2\pi}\log\frac{r'}{r}+\frac{1}{\pi}\lim_{\mu\to 0}\int_0^\infty e^{-k(y+y')}\frac{\cos k(x-x')}{k-K+\mu_i}dk\ , \quad\cdots\cdots\ (2\cdot1\cdot1)$$

こゝに $P\equiv(x, y)$, $r=\overline{PQ}$, $r'=\overline{P\bar{Q}}$, $\bar{Q}\equiv(x', -y')$

この解は水面でSをxに関してフーリエ変換する事によって求められる。この際，次の関係がある。

$$\frac{1}{x+iy}=-i\int_0^\infty e^{ik(x+iy)}dk\ ,$$

$$\log(x+iy)=-\int_0^\infty\left[e^{ik(x+iy)}-e^{ik}\right]\frac{dk}{k}\ , \quad\cdots\ (2\cdot1\cdot2)$$

ついでに

$$(x+iy)\left[\log(x+iy)-1\right]=i\int_0^\infty\left[e^{ik(x+iy)}-1-ikze^{ik}\right]\frac{dk}{k^2}\ ,$$

先ず $\qquad S(P,Q)=S(Q,P)\ , \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2\cdot1\cdot3)$

つまり可逆性がある。３次元問題でもこれは成立つ。しかし前進速度がある場合，定常問題では波の項の符号が変り非可逆的である。

次に

$$\left(K+\frac{\partial}{\partial y}\right)S(P,Q)=\frac{1}{2\pi}\left[\left(K+\frac{\partial}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}+\left(K-\frac{\partial}{\partial y}\right)\log r'\right], \quad\cdots\ (2\cdot1\cdot4)$$

となって波が消える。

$P\to Q$では(2･1･1)の右辺第３項の積分はkの大きい所の値で決まるので，

$$\frac{1}{k-K}=\frac{1}{k}+\frac{K}{k(k-K)}\longrightarrow\frac{1}{k}+\frac{K}{k^2}$$

として(2･2･2)を利用し，

$$S(P,Q)\xrightarrow[P\to Q]{}\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{1}{r\,r'}\right)+\frac{K}{\pi}\mathscr{R}_e\left[(\overline{x-x'}+i\overline{y+y'})\log(\overline{x-x'}+i\overline{y+y'})\right]+O(r')$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2\cdot1\cdot5)$$

右辺第２項はKの小さい時は第１項に比して無視しても良いように見えるがKが大きい時は必ずしも無視し得ないと考えられる。

またPとQが充分離れている時は，

$$S(P,Q)=\to\ -i\,e^{-K(y+y')-iK|x-x'|}+\left(y'-\frac{1}{K}\right)\left(1-x'\frac{\partial}{\partial x}\right)u_1(P)+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2\cdot1\cdot6)$$

$$u_1(P)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{y}{r^2}-\frac{x^2-y^2}{Kr^4}\right),\quad r=x^2+y^2\ , \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\ (2\cdot1\cdot7)$$

となって右辺第1項は発散波を表わし，他は波なしポテンシャルである。

また（$y'-\dfrac{1}{K}$）は原点で正則な波なしポテンシャルである。

応用上(2・1・1)の共役関数Tを次のように考えておくと便利な事がある。

$$\frac{\partial}{\partial x}S=\frac{\partial}{\partial y}T\quad,\quad\frac{\partial S}{\partial y}=-\frac{\partial T}{\partial x}\quad,\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot1\cdot8)$$

$$T(P,Q)=\frac{1}{2\pi}(-\theta+\theta')+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-k(y+y')}\sin k(x-x')}{k-K+\mu i}dk\quad,\quad\cdots\cdots(2\cdot1\cdot9)$$

$$\tan\theta=\frac{y-y'}{x-x'}\quad,\quad\tan\theta'=\frac{y+y'}{x-x'}$$

であるが，θ，θ'のとり方に充分留意しなければならない。よく似た関数として単位サーキュレーションによるポテンシャルがある。

その流れ関数はSと同じ特異性をもつからそれと較べる為に流れ関数φを考えよう。(1・2・11)をxで微分して流れ関数の水面条件は，

$$K\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,0)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x,0)=0\quad,\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot1\cdot10)$$

これは$K=g/U^2$，（U；一様流れの速度）とおくと一様流れの中の定常問題（定常造波抵抗理論）の時の速度ポテンシャルの水面条件である。

逆に定常問題の場合の流れ関数の水面条件は(1・1・11)である。

さて今の問題では(2・1・1)を求めたのと同じ方法で流れ関数T^Tは，

$$T^T(P,Q)=\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{1}{rr'}\right)+\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-k(y+y')}\cos k(x-x')}{k-K+\mu i}dk\quad,\quad\cdots\cdots(2\cdot1\cdot11)$$

それ故速度ポテンシャルは，

$$S^T(P,Q)=\frac{-1}{2\pi}(\theta+\theta')-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-k(y+y')}\sin k(x-x')}{k-K+\mu i}dk\quad,\quad\cdots\cdots(2\cdot1\cdot12)$$

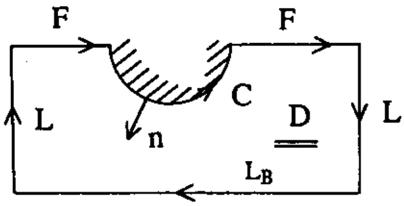
定常問題の核関数では波は上流側にないと言う条件がつくので(2・1・11)と波の項だけ異なる。今その速度ポテンシャル$S^{(U)}$としxの正則が上流とすると，

$$S^{(U)}(P,Q)=T^T(P,Q)+ie^{-iKx-Ky}\quad,\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot1\cdot13)$$

実際これは実関数となる。

2.2　速度ポテンシャルの表現

速度ポテンシャル又は流れ関数は調和関数であるからよく知られているように右図の積分路に関し，



$$\phi(P)=\frac{-1}{2\pi}\int_{C+F+L+L_B}\left[\frac{\partial\phi}{\partial n}(Q)\ \log r(P,Q)-\phi(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q}\log r\right]ds_Q\ ,$$

$$\text{in}\quad D\ ,$$

$$=0\quad \text{out of}\quad D\ ,\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(2\cdot2\cdot1)$$

なる表現がある。

波がなければ積分路Lは無限遠方に持って行く事によりその寄与を充分小さくする事が出来ると考えられるが今は波があるとするのでL上の積分を無視出来ない。（無限水深ならば水底の部分はもちろん無視出来る。）

こゝで対数特異性の所に前節の基本特異性を導入しても同じ表現が得られこの際F上の積分は打消し合って，

$$\phi(P)=\int_C\left[\frac{\partial\phi}{\partial n}S(P,Q)-\phi(Q)\frac{\partial}{\partial n_Q}S\right]ds_Q\ ,\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(2\cdot2\cdot2)$$

$$\text{in } D$$

$$=0\quad\text{out in } D$$

なる表現が得られる。

この時L上の積分が消える為には$|x|$の充分大きい所で，

$$\frac{\partial}{\partial|x|}S(P,Q)\fallingdotseq -iKS(P,Q)$$

$$|x|\gg1\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(2\cdot2\cdot3)$$

$$\frac{\partial}{\partial|x|}\phi(P)\fallingdotseq -iK\phi(P)$$

なる条件が必要でこれはSommerfeld の放射条件である。

これは速度ポテンシャルが(2・1・6)の形の波，つまり外側に放射する波を持っていればよい事を示す。

しかし一方領域Dの外側では恒等的に0となるのであるからこの条件は外側から見るとLでCの起す波を吸収している事になり，これは消波条件あるいは波吸収条件と言える。

(2・2・2)の表現に到達するのにもう一つの障害があって，それはサーキュレーションによる流れ

関数 T^r (2・1・10) を使う場合に生じるものでその際水面条件は (2・1・10) であるから，F 上の積分により

$$\phi(P) = \int_C \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} T^r(P,Q) - \phi \frac{\partial}{\partial n} T^r \right] ds_Q + \phi_L \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot2\cdot4)$$

$$\phi_L = - \int_F \left[\frac{\partial \phi}{\partial y'} T^r - \phi \frac{\partial}{\partial y'} T^r \right] dx'$$

$$= \frac{1}{K} \left[\phi \frac{\partial T^r}{\partial x'} - \frac{\partial \phi}{\partial x'} T^r \right]_{\mathrm{F.P.}}^{\mathrm{A.P.}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot2\cdot5)$$

のように ϕ_L なる項が残り，これは定常問題で言う所謂線積分項である。

定常問題では法線微分が０の解があり，少々面倒な事になった。

この場合も例えば，

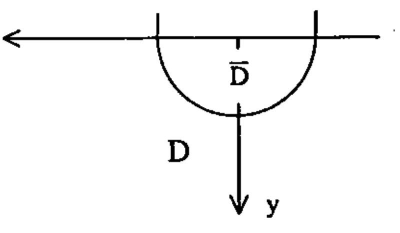
$$\phi_H(P) = \int_C \left[\frac{\partial \phi}{\partial n} T^r - \phi \frac{\partial}{\partial n} T^r \right] ds + \left[T^r \right]_{\mathrm{F.P.}}^{\mathrm{A.P}} \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot2\cdot6)$$

のような流れ関数は $\phi = 0$ に対し恒等的に０でない解を持つと考えられる。

しかし右辺第２項に対応する速度ポテンシャルは (2・1・12) によりA.P., F.P.において水面から物体表面に移る際ジャンプがある。

それ故，この場合は水面と物体面で速度ポテンシャルが連続であると言う条件を追加すれば一意的に解は定まると考えられる。

実際 ϕ がジャンプする事は物理的には圧力がジャンプする事であるから，物体の近くの水面で妙な事が起らない限りそのような解は考えにくい。しかし，きついタンブルホームを持つような物体で計算精度がやゝおちるような場合はこのような解が表われて来る可能性はあろう。



最後に (2・2・2) において第２式を使い，D の補領域 $\overline{D}$ を考え，差引きして吹出し式，２重吹出し式，サーキュレーション式表現を得る事が出来る。

$$\phi(P) = \int_C \sigma(Q)\, S(P,Q)\, ds \quad , \qquad \cdots\cdots (2\cdot2\cdot4)$$

$$\phi(P) = \int_C \mu(Q) \frac{\partial}{\partial n_Q} S(P,Q)\, ds \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot2\cdot5)$$

$$\phi(P) = \int_C r(Q)\, S^r(P,Q)\, ds \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot2\cdot6)$$

所で(2・1・8)より

$$\frac{\partial}{\partial n_Q} S(P,Q)=\frac{\partial}{\partial s_Q} T(P,Q)\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot2\cdot7)$$

(2・1・9)と(2・1・12)を較べて

$$T(P,Q) = S^{\gamma}(P,Q)\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot2\cdot8)$$

であるから(2・2・5)を部分積分して

$$\phi(P) = [\mu S^{\gamma}] - \int_C \frac{\partial\mu}{\partial s_Q} S^{\gamma}(P,Q)\,ds_Q\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot2\cdot9)$$

となり

$$\gamma = -\frac{\partial\mu}{\partial s} \quad \text{on}\quad C\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot2\cdot10)$$

であるが(2・2・5)と(2・2・6)は(2・2・9)の右辺第1項分だけ差がある。

2.3 遠場の漸近展開とコッチン関数

(2・2・2)に(2・1・6)を代入すると遠場では

$$\phi(P) \xrightarrow[|x|\gg1]{} iH^{\pm}(K)\ e^{-Ky\mp iKx} - f_2'\,u_1(P) + \cdots\cdots,\quad \begin{pmatrix} x>0\ ,+\text{印} \\ x<0\ ,-\text{印}\end{pmatrix} \ \cdots\ (2\cdot3\cdot1)$$

こゝに

$$H^{\pm}(K) = \int_C \left(\phi\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial\phi}{\partial n}\right) e^{-Ky\pm iKx}\,ds\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot3\cdot2)$$

$$f_2' = \int_C \left[\phi\frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial\phi}{\partial n}\left(y-\frac{1}{K}\right)\right] ds\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot3\cdot3)$$

のようになって遠場の波振幅はコッチン関数であらわされ第2項は波なしポテンシャルでその係数は後出のように力積分である。

このコッチン関数は遠場の発散波振幅が物体上のポテンシャルと境界条件で表わされると言う意味で遠場と近場の性質を結びつける関数と言える。

また $e^{-Ky+iKx}$ を x の負方向へ進む入射波と見，その散乱ポテンシャルを ϕ_d^+ とすると

$$\frac{\partial}{\partial n}\phi_d^+(P) = -\frac{\partial}{\partial n}e^{-Ky+iKx}\ ,\quad \text{on}\quad C\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot3\cdot4)$$

となるから，これを(2・3・2)に代入すると後出の可逆定理を使って

$$H^+(K) = -\int_C \Phi_d^+(P)\frac{\partial\phi}{\partial n}\,ds\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot3\cdot5)$$

$$\Phi_d^{\pm}(P) = e^{-Ky\pm iKx} + \phi_d^{\pm}(P)\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot3\cdot6)$$

即ち，物体が静止していて入射波を散乱している時の全速度ポテンシャルに境界条件をかけて積分したものとなっているから，波による強制力あるいはモーメントを表現している事になる。$\frac{\partial\phi}{\partial n}$ に

制限はないから，一般に物体が振動する場合についても夫々の振動モードの波強制（一般）力を表現している。

2.4 境界積分方程式

境界値問題を解くには(2・2・2)又は(2・2・4～6)の法線微分をとったものをP on Cとすれば積分方程式と見なせるからこれを解くのがよく使われる方法である。

今は(2・2・2)について考えて見よう。

境界積分方程式は留数に注意して

$$\frac{1}{2}\phi(P)+\int_C \phi\frac{\partial}{\partial n}S\Big|_C ds=\int_C\frac{\partial\phi}{\partial n}S(P,Q)ds \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot4\cdot1)$$

と書ける。

特に上下ゆれ ϕ_2，散乱 ϕ_d^+ では

$$\begin{aligned}&\int_C\left[\left(y-\frac{1}{K}\right)\frac{\partial}{\partial n}S-\frac{\partial y}{\partial n}S\right]ds=0\\&\int_C\left[e^{-Ky+iKy}\frac{\partial}{\partial n}S-S\frac{\partial}{\partial n}e^{-Ky+iKx}\right]ds=0\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot4\cdot2)$$

であるから，まず(2・2・2)は

$$\begin{aligned}&\phi_2(P)=-\int_C\Phi_2\frac{\partial}{\partial n}S(P,Q)ds \quad ,\\&\Phi_2=\phi_2+y-\frac{1}{K} \quad ,\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot4\cdot3)$$

$$\phi_d^+(P)=-\int\Phi_d^+\frac{\partial}{\partial n}S\,ds \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot4\cdot4)$$

Φ_d^+ は(2・3・6)による。

となるから境界積分方程式は

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\Phi_2(P)+\int_C\Phi_2\frac{\partial}{\partial n}S\Big|_C ds=y-\frac{1}{K} \quad ,\\&\frac{1}{2}\Phi_d^+(P)+\int_C\Phi\frac{\partial}{\partial n}S\Big|_C ds=e^{-Ky+iKx} \quad ,\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot4\cdot5)$$

と書ける。

いづれにしてもフレドホルムの第2種方程式であるから

$$\frac{1}{2}\phi(P)+\lambda\int_C\phi\frac{\partial}{\partial n}S\Big|_C ds=0 \;, \qquad (2\cdot4\cdot6)$$

なる斉次方程式の固有値λが1でなければ解を有する。

この核関数は(2・2・3)により対称であるが，しかしSelf adjoint（$\overline{S}(P,Q)\neq S(Q,P)$）ではない。

そこでSを実部と虚部に分解すると(2・1・1)より

$$S(P,Q)=S_c(P,Q)-i\,S_s(P,Q)\;,$$
$$S_s(P,Q)=e^{-K(y+y')}\cos K(x-x')\;, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot4\cdot7)$$

ϕも

$$\phi=\phi_c-i\,\phi_s\quad, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot4\cdot8)$$

と実部，虚部をわけて，簡単のために

$$\frac{\partial\phi_s}{\partial n}=0\quad,\quad \text{on}\quad C \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot4\cdot9)$$

とし(2・4・1)に代入すると次の２つの方程式となる。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\phi_c(P)+\int_C\phi_c\frac{\partial}{\partial n}S_c\Big|_C ds&=\int_C\frac{\partial\phi_c}{\partial n}S_c\,ds+\int_C\phi_s\frac{\partial}{\partial n}S_s\,ds\;,\\ \frac{1}{2}\phi_s(P)+\int_C\phi_s\frac{\partial}{\partial n}S_c\Big|_C ds&=-\int_C\phi_c\frac{\partial}{\partial n}S_s\,ds\quad,\end{aligned} \qquad (2\cdot4\cdot5)$$

こうしておくと自己随伴の対称核を有するフレドホルムの第２種方程式であるから数学的難点はない。

この式を整理するとわかるように ϕ_c と ϕ_s の間には密接な関係がある。

この事を端的に見るには（$\phi-\overline{\phi}$）$=-2\,\phi_s$ なる関数の境界値問題を考えて見るとよい。

まず(2・4・9)を仮定すると

$$\frac{\partial}{\partial n}(\phi-\overline{\phi})=0\qquad\text{on}\quad C\quad, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot4\cdot5)$$

無限遠方では(2・3・1)から

$$\begin{aligned}\phi-\overline{\phi}&\xrightarrow[x\gg1]{}iH^{+}(K)\,e^{-Ky-iKx}+i\overline{H^{+}}\,e^{-Ky+ikx}\\&\xrightarrow[x\ll-1]{}iH^{-}(K)\,e^{-Ky+iKx}+i\overline{H^{-}}\,e^{-Ky-iKx}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot4\cdot6)$$

この夫々の第２項は原点に入射する波を表わしているから(2・3・6)を使って，それを差引いておくと

$$\begin{aligned}\phi-\overline{\phi}-i\overline{H^{+}}(K)\,\Phi_d^{+}-i\overline{H^{-}}(K)\,\Phi_d^{-}&\xrightarrow[x>0]{}O(e^{-Ky-iKx})\\&\xrightarrow[x<0]{}O(e^{-Ky+iKx})\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot4\cdot6)$$

となって左辺は放射ポテンシャルであり，(2・4・5)の境界条件をもつ故，もし解が一意的ならば

$$\phi(P)-\overline{\phi}(P)=i\overline{H^{+}}(K)\,\Phi_d^{+}(P)+i\overline{H^{-}}(K)\,\Phi_d^{-}(P)\quad, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot4\cdot7)$$

なる関係がある。

それ故，散乱ポテンシャルがわかっていれば ϕ_s をあらためて求める必要はない。また逆に(2・4・1)を解く過程で散乱ポテンシャルも求めている事は(2・4・5)によって明らかであろう。

境界値問題を解くもう一つの普及した方法はUrsell－田才法であり，それは(2・3・1)からわかるように遠場では波と波なしポテンシャルになっている事からも予想されるように，原点に波源をおき，他は波なしポテンシャルで近似する方法である。

波源ポテンシャルを $\phi_W(P)$としよう。それはSでよい。そのコッチン関数を

$$H_W^{\pm}(K) = 1 \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot4\cdot8)$$

のように定義しよう。

また左右対称な浮体の対称運動を考えて

$$H^{+}(K) = H^{-}(K) \equiv H(K) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot4\cdot9)$$

とすると

$$\phi(P) - iH(K)\,\phi_W(P) = \phi_m(P) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot4\cdot10)$$

なる関数 ϕ_m は波なしである。

今，新しく

$$S_m(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\left(1-\frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial y}\right)\log\frac{r'}{r} \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot4\cdot11)$$

なる核関数を考えると

$$\left(K+\frac{\partial}{\partial y}\right)S(P,Q) = \frac{1}{2\pi K}\left(K^2+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\log\frac{r'}{r}$$

$$\xrightarrow[\substack{y\to 0\\ \text{or } y'\to 0}]{} 0 \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot4\cdot12)$$

となって水面条件を満足する故，(2・2・2)を導いた時と同様にして

$$\phi_m(P) = \int_C \left[\frac{\partial\phi_m}{\partial n}S_m - \phi_m\frac{\partial}{\partial n}S_m\right]ds \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot4\cdot13)$$

あるいは

$$m(P) = \frac{1}{2\pi}\int\left(\frac{\partial\phi_m}{\partial n} - \phi_m\frac{\partial}{\partial n}\right)\log\frac{r'}{r}\,ds \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot4\cdot14)$$

とおくと

$$\phi_m(P) = m(P) - \frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial y}m(P) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot4\cdot15)$$

境界条件は(2・4・10)より

$$\frac{\partial}{\partial n}\phi_m(P) = \frac{\partial\phi}{\partial n} - iH(K)\frac{\partial}{\partial n}\phi_W \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot4\cdot16)$$

であるから前同様境界積分方程式を作って解けばよい訳であるが，$H(K)$は未だ未知であるからそれを決める為に

$$H_m^{\pm}(K) = \int_C\left(\phi_m\frac{\partial}{\partial n} - \frac{\partial\phi_m}{\partial n}\right)e^{-Ky\pm iKx}\,ds = 0 \quad , \quad \cdots\cdots\cdots (2\cdot4\cdot17)$$

なる条件を加えておけばよい。

Ursell－田才法では(2・5・13)，(2・5・14)の $m(P)$ を級数展開して解いているわけである。(2・5・14)は波なしポテンシャルの一般形で右辺の演算は水面条件の随伴形式である。

もう一つの考え方は(2・1・4)を利用して(2・2・2)から

$$K\phi(P)+\frac{\partial}{\partial y}\phi(P)=\frac{1}{2\pi}\int_C\left[\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial}{\partial n}\right]\left[\left(K+\frac{\partial}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r}\right.$$

$$\left.+\left(K-\frac{\partial}{\partial y}\right)\log\frac{1}{r'}\right]ds\ , \qquad (2\cdot4\cdot18)$$

として波を追出す方法がある。

この場合右辺は水面で0となる正則関数であり，特にCがy軸に一致，つまり平板の時便利である。その時は，まず(2・2・2)は

$$K\phi+\left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_{y=0}=+P(x)\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot4\cdot19)$$

とおくと

$$\phi(P)=-\int_{-1}^{1}P(x')\ S(P,Q)\,dx'\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot4\cdot20)$$

となるから

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+K^2\right)\frac{\partial\phi}{\partial y}=\frac{d^2P(x')}{dx^2}-\frac{K}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{P(x')}{x-x'}\,dx'\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot4\cdot21)$$

のような境界積分方程式を得る。

この積分方程式は帆の形を与えるものに等しい。

その他浅水，有限水深の場合は物体のない所では直交関数系があり，一方核関数は大変複雑なのでそれを利用するのが便利であり，その時は領域を分割して物体を含む領域では(2・2・1)を使う事になる。もちろん(2・2・1)を最初から使って放射条件と境界条件で問題を解く事も出来るわけでこれも便利な場合がある。

この際，放射条件のかわりに適当な所に波吸収特異点をおいてもよい。

2.5 力とモーメント，可逆定理

力とモーメントは(1・3・9)，(1・3・10)で与えられる。

今の場合は(1・2・6)の圧力を積分しても同じ結果となり，

$$F_{ij}=-\int_C P_i\frac{\partial x_j}{\partial n}\,ds=-\rho\,\omega^2X_i f_{ij}\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot5\cdot1)$$

$$f_{ij}=\int_C\phi_i\frac{\partial\phi_j}{\partial n}\,ds\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot5\cdot2)$$

但しX_iはi－modeの運動の振巾とする。

こゝで，グリーンの定理より

$$f_{ij}=-\iint_D\nabla\phi_i\ \nabla\phi_j\ dxdy+g\int_F\eta_i\ \eta_j\ dx\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot5\cdot3)$$

となり，(1・4・6)，(1・4・14)と同形になるが(1・4・14)と少し異なるのでmodified Lagrangeanと呼ばれる。

(2・5・3)の形から直ちに可逆定理

$$f_{ij} = f_{ji} \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot5\cdot4)$$

を得る。

この定理では ϕ_i , ϕ_j は放射ポテンシャルでなければならない。

そこで入射波がある場合は散乱波について

$$\int_C \phi_d \frac{\partial\phi_j}{\partial n}\, ds = \int_C \phi_j \frac{\partial\phi_d}{\partial n}\, ds = -\int_C \phi_j \frac{\partial\phi_0}{\partial n}\, ds \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot5\cdot6)$$

ϕ_0 は入射波とする。

それ故波の強制力又はモーメントは a を波振巾とに

$$E_j = +\rho g a \int_C (\phi_0 + \phi_d) \frac{\partial\phi_j}{\partial n}\, ds \quad ,$$

となり，上式と(2・3・2)から所謂ハスキントの公式を得る。

$$E_j = -\rho g a H(K) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot5\cdot7)$$

(2・5・4)は物体が複数個ある場合に拡張出来る。今は C_1 , C_2 2ケの物体があるものとし，C_1 が i-mode の運動を，C_2 が j-mode の運動をしているものとすると夫々の速度ポテンシャルの境界条件は

$$\frac{\partial}{\partial n}\phi_i = -\frac{\partial x_i}{\partial n} \quad \text{on} \quad C_1 \; , \qquad \frac{\partial\phi_i}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad C_2 \; ,$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\phi_j = 0 \quad \text{on} \quad C_1 \; , \qquad \frac{\partial\phi_j}{\partial n} = -\frac{\partial x_j}{\partial n} \quad \text{on} \quad C_2 \; , \qquad \cdots\cdots (2\cdot5\cdot8)$$

としよう。

グリーンの定理より

$$\int_{C_1+C_2} \phi_i \frac{\partial\phi_j}{\partial n}\, ds = \int_{C_1+C_2} \phi_j \frac{\partial\phi_i}{\partial n}\, ds$$

であるから(2・5・8)より

$$\int_{C_1} \phi_j \frac{\partial\phi_i}{\partial n}\, ds = \int_{C_2} \phi_i \frac{\partial\phi_j}{\partial n}\, ds \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot5\cdot9)$$

となる。

つまり C_2 の j-mode の運動によって C_1 が受ける i-mode の力は C_1 の i-mode の運動によって C_2 がうける j-mode の力に等しい。

C_1 と C_2 が充分離れているならば，互に他の運動による影響は(2・3・1)より進行波だけである。それ故(2・5・9)は(2・5・7)の形に移行する。これがハスキントの関係のもとの形である。

2.6 エネルギー定理

圧力 p が速度 v で動く物体になす仕事の時間平均は

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T p(t)\,v(t)\,dt = \frac{1}{4}\left[\, p(\omega)\,\overline{v}(\omega) + \overline{p}(\omega)\,v(\omega) \,\right] \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot6\cdot1)$$

であるから i-mode の運動による圧力が j-mode になす仕事の時間平均は

$$W_{ij}=\frac{-1}{4}\int_C\left[p_i\frac{\partial\overline{\phi_i}}{\partial n}+\overline{p_i}\frac{\partial\phi_j}{\partial n}\right]ds=-\frac{i\rho\omega}{4}\int_C\left(\phi_i\frac{\partial\overline{\phi_j}}{\partial n}-\overline{\phi_i}\frac{\partial\phi_j}{\partial n}\right)ds\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot6\cdot2)$$

但し $\dfrac{\partial\phi_j}{\partial n}=-v_j$,

これは(1・4・17)又は(1・4・20)のように定義されるラグランジャンの虚部である事を意味しており，グリーンの定理によりこの積分は無限遠方の検査面上に変換出来るが前節の場合と異なり今は(2・3・1)からその上の積分は0にならない。境界条件を規格化し，実数値をとるようにしておくと次の積分がわかればよい。

$$f_{ij}-\overline{f_{ij}}=-\int_C(\phi_i-\overline{\phi_j})\frac{\partial x_j}{\partial n}\,ds\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot6\cdot3)$$

(2・4・7)を代入し(2・3・5)の表現を使えばよい。

$$\frac{1}{i}(\overline{f_{ij}}-f_{ij})=\overset{+}{H_j}(K)\,\overline{\overset{+}{H_i}(K)}+\overset{-}{H_j}(K)\,\overline{\overset{-}{H_i}(K)}\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot6\cdot4)$$

をうる。

特に散乱ポテンシャルを含む積分からは有用な種々の関係が出て来る。

これは(2・4・7)の関係から予想出来る所である。その式で速度ポテンシャルの複素共役値を考えたが，それはフーリエ変換の所に戻って考えると時間軸を逆にした運動を考える事であるから逆時間運動となづけると，(2・4・7)は逆時間運動を正時間運動で表現した事になる。

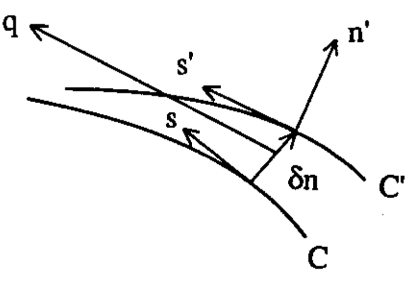
この時，前進速度があると前進速度も理屈としては逆になるけれど，数式上ではどちらも考えられ，もう一つ流れの方向だけ逆にした逆流れ運動を考えておいた方がよい。

2.7 物体の微少変形

今物体 C が法線方向に僅かに δn だけ変形したとしよう。

この時 δn は滑らかでビルヂキールのような変形は取扱かわないものとする。

C' に対する速度ポテンシャルを ϕ' とすると(2・2・2)により



$$\phi'(P)=\int_{C'}\left[\frac{\partial\phi'}{\partial n'}S-\phi'\frac{\partial S}{\partial n}\right]ds'\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot7\cdot1)$$

一方 C に対する速度ポテンシャル ϕ は(2・2・2)の形に表わされるが積分路 C' としてもよいから

$$\phi(P) = \int_{C'} \left[\frac{\partial \phi}{\partial n'} S - \phi \frac{\partial S}{\partial n'} \right] ds' \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot7\cdot2)$$

それ故

$$\delta\phi = \phi' - \phi = \int_{C'} \left[\frac{\partial(\phi' - \phi)}{\partial n'} S - \delta\phi \frac{\partial S}{\partial n'} \right] ds \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot7\cdot3)$$

こゝで流れ関数を夫々 φ' ，φとすると

$$\frac{\partial\phi'}{\partial n'} - \frac{\partial\phi}{\partial n'} \bigg|_{C'} = \frac{\partial}{\partial s'}(\varphi' - \varphi) \bigg|_{C}$$

であるが図から（ $\varphi' - \varphi$ ）つまりこの間の流量の差は

$$\varphi' - \varphi = q\,\delta n$$

$$q = -\frac{\partial \Phi}{\partial s} = -\frac{\partial}{\partial s}(+x + \phi) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot7\cdot4)$$

$x \equiv x_j$ とする。つまり qはCに沿う物体に対する相対流速である。

それ故，結局高次の項を省略すると

$$\delta\phi = \int_C \left[\frac{\partial(\delta\phi)}{\partial n} S - \delta\phi \frac{\partial S}{\partial n} \right] ds \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot7\cdot5)$$

で境界条件は

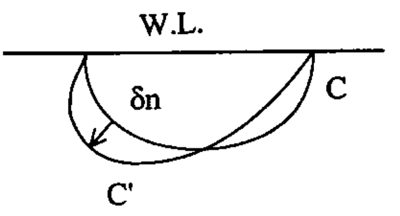
$$\frac{\partial}{\partial n}(\delta\phi) = \frac{\partial}{\partial s}(q\,\delta n) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot7\cdot6)$$

となる。

力については(2・5・2)を少し変形

して

$$f^*_{ij} = -\int_C \Phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot7\cdot7)$$



とおけば

$$f^*_{ij} = f_{ij} - A_{ij} \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot7\cdot8)$$

$$A_{ij} = \int_C x_i \frac{\partial x_j}{\partial n} ds \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot7\cdot9)$$

但し

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_i = x_i + \phi_i \quad , \\ \dfrac{\partial}{\partial n}\Phi_i = 0 \quad \text{on} \quad C \end{array}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot7\cdot10)$$

さて

$$f^*_{ij} = -\int_{C'} \Phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n'} ds + \int_C \nabla\Phi_i \nabla x_j \,\delta n\, ds$$

であるから

$$f^{*\prime}_{ij} = -\int_{C'} \Phi'_i \frac{\partial x_j}{\partial n'} ds$$

とおいてその差をとれば

$$\delta f^{*}_{ij} = f^{*\prime}_{ij} - f_{ij} = -\int_{C'} \delta\Phi_i \frac{\partial x_j}{\partial n'} ds - \int_C \nabla\Phi_i \ \nabla x_j \ \delta n ds$$

所で　$\delta\Phi_i = \Phi'_i - \Phi_i$

$$-\int_{C'} \delta\Phi_i \frac{\partial x_i}{\partial n'} ds = +\int_{C'} \delta\Phi_i \frac{\partial \phi'_j}{\partial n'} ds = \int_{C'} \phi'_j \frac{\partial}{\partial n'} (\Phi'_i - \Phi_i) ds$$

$$= -\int_{C'} \phi'_j \frac{\partial \Phi_i}{\partial n'} ds = -\int_C \phi'_j \frac{\partial \Phi_i}{\partial n} ds - \int_C \nabla\phi'_j \ \nabla\Phi_i \ \delta n ds$$

$$= -\int_C \nabla\phi_j \ \nabla\Phi_i \ \delta n ds \quad ,$$

$$\because \quad \frac{\partial \Phi'_i}{\partial n'}\bigg|_{C'} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial n}\bigg|_{C} = 0$$

それ故

$$\delta f^{*}_{ij} = -\int_C \nabla\Phi_i \ \nabla\Phi_j \ \delta n ds \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot7\cdot10)$$

特に $\Phi_i = \Phi^{+}_d$ とおくと (2・3・5) より

$$\delta H^{+}_j (K) = \int_C \nabla\Phi^{+}_d \ \nabla\Phi_j \ \delta n ds \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot7\cdot11)$$

法線微分は 0 となっている故，次のようにも書ける。

$$\delta H^{+}_j (K) = \int_C \frac{\partial \Phi^{+}_d}{\partial s} \ \frac{\partial \Phi_j}{\partial s} \ \delta n ds \quad ,$$

あるいは部分積分して水線幅は変わらないとすると，

$$\delta H^{+}_j (K) = -\int_C \Phi^{+}_d \frac{\partial}{\partial s} (\frac{\partial \Phi_j}{\partial s} \delta n) ds \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot7\cdot12)$$

となり，(2・3・5) に (2・7・6) を代入した結果に等しくなる。

2.4 節に述べたように (2・4・5) によって境界値問題をとく時は散乱ポテンシャルは常に求まっているので上式により微少変形によるコッチン関数の変分は容易に求められる。

例えばコッチン関数が近似的に 0 となるように変形するには

$$\delta n = \varepsilon f(s) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot7\cdot13)$$

と選ぶと

$$\delta H^{+} = -\varepsilon I \quad , \quad I = \int_C \Phi^{+}_d \frac{\partial}{\partial n} (\frac{\partial \Phi}{\partial s} f) ds \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot7\cdot14)$$

となるから，ε は次式で与えられる。

$$H^{+} + \delta H^{+} = 0 \quad \text{for} \quad \varepsilon = \frac{H^{+}}{I} \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot7\cdot15)$$

2.8 境界値問題の変分原理

境界値問題を解くに当ってその近似度を評価するには評価関数を定めねばならない。

例えば無限流体中では流体の運動エネルギーのようなものをとるのが最も自然であろう。

今，近似値をϕ，正解をfとしてその誤差のポテンシャルの運動エネルギーは

$$E = \frac{\rho}{2} \iint_D [\nabla(\phi - f)]^2 \, dxdy \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot8\cdot1)$$

変分をとれば

$$\delta E = \rho \iint_D (\nabla\delta\phi)\{\nabla(\phi - f)\} \, dxdy$$

$$= -\rho \iint_D \delta\phi \nabla\phi \, dxdy - \rho \int_C \delta\phi \frac{\partial(\phi - f)}{\partial n} ds \quad , \qquad \cdots\cdots (2\cdot8\cdot2)$$

となる。

先ずϕとして $\dfrac{\partial\phi}{\partial n} = \dfrac{\partial f}{\partial n}$ on C , $\cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot8\cdot3)$

なる比較関数群を選べば

$$\nabla\phi = 0 \quad \text{in} \quad D \quad \text{for} \quad \delta E = 0 \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot8\cdot4)$$

これはKelvinの定理に一致する。

しかし一般に調和関数の素解はよく知られていて境界条件を満たすようにそれを定める事の方が難かしいので数値解法的には調和関数である許容関数ϕを考える方が実際的であろう。

その時は(2・8・2)から

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\partial f}{\partial n} \quad \text{on} \quad C \quad \text{for} \quad \delta E = 0 \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot8\cdot5)$$

また，この時

$$E = \frac{-\rho}{2} \int_C \left[\phi \frac{\partial\phi}{\partial n} - 2\phi \frac{\partial f}{\partial n} + f \frac{\partial f}{\partial n} \right] ds \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot8\cdot6)$$

であり右辺第3項はϕの変分をとればなくなるから

$$I = -\frac{\rho}{2} \int_C \left[\phi \frac{\partial\phi}{\partial n} - 2\phi \frac{\partial f}{\partial n} \right] ds \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot8\cdot7)$$

なる汎関数を考えても同じである。

また，この時は

$$E \geq 0 \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot8\cdot8)$$

であるから$\dfrac{\partial\phi}{\partial n} = 0$ on C ならばϕは恒等的にD内で0となり，解の一意性が保証される。

我々の場合は評価関数としてmodifiedラグランジアンをとる事にすると(2・5・2)の形に表わされるのでやはり(2・8・7)の汎関数をとればよい。

それに水面があるので少々複雑ではあるが，水面条件を満たす調和関数はよく知られているのでそれを比較関数として変分をとれば(2・8・5)が成立つ。

しかしこの場合ラグランジアンは(2・8・8)のような定符号性を有する事は証明出来ないので解の一意性は保証出来ない。

電算機を用いる数値計算ではこの方法が便利な場合はあまりないが，$K \to 0$ 又は∞の近似値の推定，容器内の水の動揺の固有値のレーリー・リッツ法的推定に用いて便利である。

2.9 解の一意性と Irregular frequency

前節にもふれたように自由表面がある場合の解の一意性の証明は少し面倒で個々の問題で証明された以外に一般的な証明は成書類にはあまり見られない。

さて，その要点は

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on} \quad C \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2 \cdot 9 \cdot 1)$$

なる条件を満たす解が定数を除いて恒等的に 0 となる事を証明する事である。

その時先ず

$$M = -\int_C \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = 0 \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2 \cdot 9 \cdot 2)$$

又(2・3・5)により

$$H^{\pm}(K) = -\int_C \Phi_d^{\pm}(P) \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = 0 \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2 \cdot 9 \cdot 3)$$

であるから，恒等的に 0 でない ϕ が存在するとするとそれは波なしで水面で 0 となる関数 m によって(2・4・15)のように表わされる。

波なしポテンシャルは(2・4・15)のように表わされ，また今の場合境界条件(2・9・1) は斉次であるから定係数が複素数の時，それで割って $m\phi$ を実関数と考えてよいので以下そのように扱う。

(2・9・2)は

$$M = \iint_D (\nabla \phi)^2 \, dx dy - K \int_F \phi^2 \, dx$$

$$= \iint_D \left[(\nabla m)^2 + \frac{1}{K^2} (\nabla m_y)^2 - \frac{2}{K} \nabla m \nabla m_y \right] dx dy - \frac{1}{K} \int_F (m_y)^2 dx \ ,$$

となるが

$$2 \iint_D \nabla m \nabla m_y \, dx dy = \iint_D \frac{\partial}{\partial y} (\nabla m)^2 \, dx dy$$

$$= -\iint_C (\nabla m)^2 \frac{\partial y}{\partial n} ds - \int_F (m_y)^2 \, dx \quad ,$$

$$\because \quad (\nabla m)^2 \Big|_{y=0} = m_y^2$$

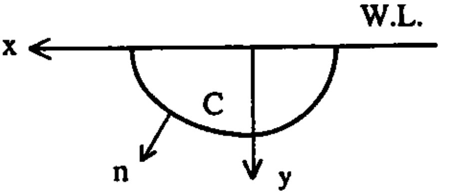
であるから結局

$$M = \iint_D \left[(\nabla m)^2 + \frac{(\nabla m_y)^2}{K^2} \right] dx dy + \frac{1}{K} \int_C (\nabla m)^2 \frac{\partial y}{\partial n} ds \quad ,$$

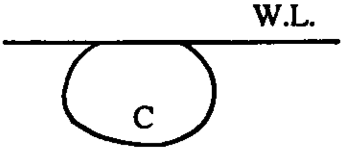
$$\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \cdot 9 \cdot 4)$$

それ故右図の(a)のような場合は

$$\frac{\partial y}{\partial n} > 0 \text{ で } M \geq 0 \; , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2 \cdot 9 \cdot 5)$$



(a)



(b)

となるが(b)のようなタムブルホームでは保証出来ない。

実際このような場合附加質量が負になる周波数領域がある事はよく知られている。さて，(a)図の場合は(2・9・2)により m 従って ϕ は恒等的に0以外の解を有せず一意性は保証される。

以上の証明はFritz Johnの証明に略等しい。

そこで(b)図のような場合又は没水体が残された事になるが，それを今度は(2・4・1)の境界積分方程式の解の一意性の問題として考えよう。

この積分方程式の核関数は対称で(2・4・5)の形とすれば更に自己随伴である。

それ故積分方程式論により，その斉次方程式が恒等的に0でなければ一意性を有する。

$$\frac{1}{2}\,\phi(P) + \int_C \phi(R)\,\frac{\partial S_C}{\partial n}\,ds_Q = 0 \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2 \cdot 9 \cdot 5)$$

先ず没水体ではポテンシャル論の同じ問題の手法に従って解のない事が証明出来るようである。（Kostyukov）

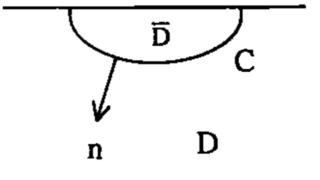
しかし浮体では特定の周波数で解を有する事が大松によって示された。

この問題は数値計算上解が不定となるのでIrregular frequencyの問題として嫌われている。

この現象はその周波数では内部領域の水が固有振動を起す事に起因する。

今内部領域の速度ポテンシャルを $\phi_i\,(P)$とすると(2・2・2)と同様にして

$$\int_C \left[\, \phi_i(Q)\frac{\partial S}{\partial n} - \frac{\partial \phi_i}{\partial n}\, S \,\right] ds_Q$$
$$= \phi_i(P) \quad \text{in } \overline{D}$$
$$= 0 \quad \text{in } D \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2 \cdot 9 \cdot 6)$$



境界条件を

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial n} = 0 \quad \text{on } C, \quad \cdots \quad (2 \cdot 9 \cdot 7)$$

として境界積分方程式を作ると今は法線が領域外に向いているので結局(2・

9·5)に一致する。

それ故(2·9·5)は内部の固有値方程式と見なしてもよい。

しかし(2·9·6)第2式より$\overline{D}$の外つまりDでは

$$\phi_i = 0 \quad \text{on} \quad C \in D \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot 9\cdot 8)$$

で $\dfrac{\partial \phi_i}{\partial n}$ はCの内外で連続故(2·9·7)により0，それ故(2·2·2)により固有関数 ϕ_i による外部ポテンシャルは0となり，解の一意性は保たれる。

吹出し分布としても同じ周波数で同じ現象があらわれる。

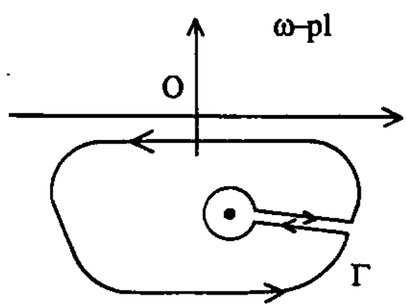
つまり(2·9·7)の条件に対する解であるから，同じ境界条件に対して解が定まらないと言う事である。

それをさける方法もいろいろ考えられているが，いずれにしても手間がかゝるので計算上厄介な問題である。

この問題が全く出て来ない方法としては級数展開に基礎をおくUrsell−田才法，領域分割法，Yeung の方法等があるが最後の方法では別に水面をどこまで考えるかで少々問題が起きる。

2.10 Kramers−Kronigの関係

変換(1·2·1)，(1·2·3)においてωを複素面で考えよう。そうすると$\mathscr{I}(\omega) < 0$では$F(\omega)$は正則で，(1·2·5)つまり$t=0$まで$f(t)$が0となるにはpoleがあってはならない。



$F(\omega)$はω−平面の下半分で正則である。それ故コーシーの定理より

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{F(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' \ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot 10\cdot 1)$$

Γを実軸にとり，ωを実軸に近づけると

$$\frac{1}{2} F(\omega) = \frac{\text{P.V.}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega')\,d\omega'}{\omega' - \omega}$$

今
$$F(\omega) = F_c(\omega) - i F_s(\omega) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot 10\cdot 2)$$

とおくと上式から

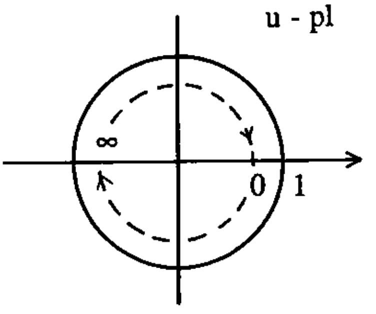
$$F_c(\omega) = \frac{-1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_s(\omega')\,d\omega'}{\omega' - \omega} = \frac{-2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega' F_s(\omega')\,d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \quad , \qquad \cdots\cdots (2\cdot 10\cdot 3)$$

$$F_s(\omega) = +\frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{F_c(\omega')\,d\omega'}{\omega'^2 - \omega^2} \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2\cdot 10\cdot 4)$$

これはKramers−Kronigの関係と呼ばれる。

なお$F_c(\infty)$が有限値をとる場合はその値だけ差引いて$F_c(\infty)=0$ として考える。

これから$F(\omega)$の実部虚部のどちらかがわかっていれば他方が計算出来るわけであるが (2・10・3) 又は(2・10・4)の積分は主値をとるので少々面倒である。



そこで今適当な定数Cを選び

$$u=\frac{iC+\omega}{iC-\omega}\ ,\ \omega=\frac{C}{i}\ \frac{1-u}{1+u}\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot10\cdot5)$$

実軸上では

$$\omega=C\ \tan\frac{\theta}{2} \qquad (2\cdot10\cdot6)$$

とおくと　$u=e^{-i\theta}$

となり，ωの下半面はuー平面の単位円の内部に写像される。

そここで$F(\omega)$に正則でかつ(1・2・4)のようでなければならぬ。，実係数 a_n により

$$F(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\ u^n \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot10\cdot7)$$

と展開出来る。

それ故(2・10・2)のように分解すれば

$$F_c(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\ \cos\ n\theta$$
$$F_s(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\ \sin\ n\theta \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot10\cdot8)$$

のようになり，実部と虚部の関係は明瞭である。

(2・10・3)，(2・10・4)は (2・10・6)の変換をするとポアッソンの公式（コーシーの公式）となる。
計算としては，例えば

$$F_s(\omega)=\frac{1}{\pi}\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\ n\theta\int_{-\pi}^{\pi}F_c(\omega)\ \cos\ n\theta\, d\theta$$
$$=\frac{2}{\pi}\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin\ n\theta\int_{0}^{\pi}F_c(\omega)\ \cos\ n\theta\, d\theta\quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(2\cdot10\cdot9)$$

のように実行すればよい。

また$F(\omega)$の対数をとってもやはり

$$\log\ F(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\ u^n \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots(2\cdot10\cdot10)$$

と展開出来ると考えられるから

$$\log\sqrt{F_c^2+F_s^2} = \sum_n b_n \cos n\theta \ ,$$
$$\tan^{-1}\frac{F_s}{F_c} = \sum_n b_n \sin n\theta \ , \quad \cdots\cdots\cdots (2\cdot10\cdot11)$$

となり，ゲインと位相も一方がわかれば他方がわかる。

いづれにしても $F(\omega)$ の実部と虚部は互に独立でない事を示す関係である。

3. 時間領域の理論

従来時間領域での研究は少ないけれど，動揺振幅が小さくて物体境界 C の平均位置で境界条件が指定出来る場合は周波数領域の解をフーリエ逆変換すればよく，境界値問題も周波数領域での方が簡便で実績も多く実用的であると考えられる。

しかし物体境界 C が大きく動く場合や物体が水面に突入，脱出する問題などではやはり時間領域で問題を解かざるを得ない。

つまりそのような時は物体境界条件が平均位置で指定出来ず所謂非線型となる場合である。

しかしそのような時でも水面上昇は飛抹のような特別な局部的現象（これは物体のそばでおこる）を除けば一般に小さくて線型化してもよいように考えられる。

以下そのような場合について述べる。

3.1 基本特異性

(2・1・1) の核をフーリエ逆変換して

$$G(P,Q;t)=\frac{\delta(t)}{2\pi}\log(r'/r)+M(P,\overline{Q};t)\ , \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot1\cdot1)$$

$$M(P,\overline{Q};t)=\frac{1}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}d\omega\int_0^{\infty}\frac{e^{-k(y+y')}\cos k(x-x')}{k-K+\mu i}dk\ , \quad \cdots\cdots (3\cdot1\cdot2)$$

この M は

$$M(x,y;t)=\frac{g}{2\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\omega t}d\omega}{gk-\omega^2+\mu i}\int_0^{\infty}e^{-ky}\cos kx\,dk\ , \quad \cdots\cdots\cdots (3\cdot1\cdot3)$$

とも書ける。

こゝに

$$\delta(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega t}d\omega\ , \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot1\cdot4)$$

はDiracの δ 関数である。

(3・1・3) を ω について積分すると

$$M(x,y;t)=\frac{g}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-ky}\cos kx\frac{\sin\sqrt{gk}\,t}{\sqrt{gk}}dk\ , \text{ for } t>0$$
$$=0 \quad \text{for} \quad t<0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot1\cdot5)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - g\frac{\partial}{\partial y}\right) M(x, y, t) = 0 \quad ,$$

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^4 + g^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} M(x, y, t) = 0 \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot1\cdot6)$$

$$M(x, y; t) \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{-g}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^n t^{2n+1}}{(2n+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^n \left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\longrightarrow 0 \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot1\cdot7)$$

また

$$M(x, y; t) = \frac{g}{\pi} \mathscr{R}_e \left[\frac{i e^{-i\xi^2}}{\sqrt{gz}} \int_{-\xi}^{\xi} e^{iu^2} du \right] , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot1\cdot8)$$

$$但し \quad \xi = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{z}} t \quad , \qquad z = x + iy \quad ,$$

とも書け，これは複素変数のフレネル積分である。

$$M(x, y; t) \xrightarrow[\frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{z}} t \gg 1]{} \frac{g}{\pi} \mathscr{R}_e \left[\frac{i\sqrt{i\pi}}{2\sqrt{gz}} e^{-i\xi^2} \right] , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot1\cdot9)$$

なおMの共役関数をNとすると

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y}, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x} \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot1\cdot10)$$

$$N(x, y, t) = \frac{g}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ky} \sin kx \, \frac{\sin\sqrt{gk}\,t}{\sqrt{gk}} \, dk \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot1\cdot11)$$

$$= 0 \qquad \text{for} \quad t < 0$$

となり，(3・1・6)の微分方程式をみたす。

又

$$N + iN = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{i\pi z}} \; e^{-i\xi^2} \int_{\xi}^{\infty} e^{iu^2} du \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot1\cdot12)$$

なお

$$\int_0^{\infty} M(x+Ut, y; t)\,dt = -\frac{1}{\pi} \log r - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ky} \cos kx}{k - \gamma + \mu i} dk$$

$$- i e^{-\gamma y - i\gamma x} \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot1\cdot13)$$

$$但し \quad \gamma = g / U^2 \quad ,$$

3.2 速度ポテンシャルの表現

まず速度ポテンシャルは調和関数であるから，各瞬間については(2・2・1)が成立つ。

しかし今これだけでは例えば境界積分方程式は作れず $\frac{\partial\phi}{\partial t}$（これも調和関数）について同様な式を作り，連立させて作る事になる。

直接に ϕ を表現するには(2・2・2)をフーリエ逆変換して(3・1・1)を利用する。

1.2節で用いた手法で

$$\phi(P,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau\int_{C(\tau)}\left[\frac{\partial\phi}{\partial n}(Q,\tau)\,G(P,Q,t-\tau)-\phi\frac{\partial G}{\partial n}\right]ds(Q),\cdots\cdots(3\cdot2\cdot1)$$

あるいはGを分割して

$$\phi(P;t)=\frac{1}{2\pi}\int_{C(t)}\left(\frac{\partial\phi(t)}{\partial n}-\phi\frac{\partial}{\partial n}\right)\log\frac{r'}{r}\,ds(Q)$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau\int_{C(\tau)}\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial}{\partial n}\right)M(P,\overline{Q},t-\tau)\,ds(Q)\quad,\cdots\cdots(3\cdot2\cdot2)$$

なお$t=0$まで水は静止しているものとする。そうすると先ず(3·1·7)より

$$\lim_{t\to+0}\phi(P;t)=\lim_{t\to0}\frac{1}{2\pi}\int_{C(0)}\left[\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial}{\partial n}\right]_{t=0}\log\frac{r'}{r}\,ds\quad,\cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot2\cdot3)$$

$M(P,\overline{Q})$は物体上，水面内に特異性を有しないから(3·2·2)はこのまゝ(3·2·3)の初期条件と与えられた境界条件により境界積分方程式として使え時間をおって解いてゆけばよい。

特に境界Cが時間に依存しなければそのフーリエ変換は(2·2·2)であり，その解から(1·2·19)のようなインパルスポテンシャル $\phi^{\delta}(P;t)$を求め，それを積分して(1·2·18)のように表現出来る。

(3·2·2)では境界Cが動いてもよくHavelockはこれを使って一様流れのポテンシャルを導いている。

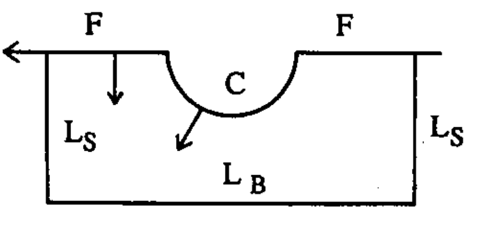
(3·1·13)を用いて(3·2·2)を積分すれば求められる訳であるが(3·1·13)の積分の際対数項があらわれて幾分不定な要素が懸念される。

この点が所謂線積分項の問題として現われる訳である。

元来，自由水面は開いているので何等かの不定さが侵入する恐れは常にある。

そこで各段階において例えば水量は一定であると言う条件をcheckしておけばよいと考えられる。

今，自由表面およびCからの流量は



$$Q=+\int_{C+F}\frac{\partial\phi}{\partial n}\,ds$$

$$=-\int_F\frac{\partial\phi}{\partial y}\,dx+\int_C\frac{\partial\phi}{\partial n}\,ds$$

$$=+\int_F\frac{\partial\eta(x,t)}{\partial t}\,dx-\int_C v_n(t)\,ds$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(3\cdot2\cdot4)$$

ガウスの定理より

$$Q = -\int_{L_S+L_B} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \quad ,$$

となるが L_S からは波だけが出て行くとすれば平均において流出量はなく，また L_B からも明らかにない。

それ故　　　$Q = 0$

即ち

$$\int_F \frac{\partial \eta(x,t)}{\partial t} dx = + \int_{C(t)} v_n(t)\, ds \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot2\cdot5)$$

あるいは t で積分して

$$\int_F [\,\eta(x,t) - \eta(x,0)\,]\, dx = \int_0^t dt \int_{C(t)} v_n(t)\, ds \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot2\cdot6)$$

最前の一様速度で前進する場合では各瞬間で

$$\int_{C(t)} v_n(t)\, ds = 0 \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot2\cdot7)$$

と考えられるから

$$\int \frac{\partial \eta}{\partial n} dx = -\int_F \frac{\partial \phi}{\partial y} dx = [\,\phi\,] = 0 \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot2\cdot8)$$

となって無限上，下流で $\phi = 0$ とすると，C が水面を切る所でも $\phi = 0$ となる必要があり，実際そのようにして解が確定する。

(3・2・7)は自明のようであるが(3・2・6)のように理解すれば(3・2・8)は必ずしも 0 でなくともよい。

その時は(3・2・6)で静止時の水面変位の積分と現在のそれに差がある事になる。

こゝにアルキメデスの原理の拡張定理があり，それはその積分（線型化しない実際の水面変位で）に密度をかけたものが浮力に等しい。

3.3　遠場，フラップ式造波機，入射波

これ以後は再び元に戻って動揺振巾は微少量で物体平均位置は変らないものとしよう。

速度ポテンシャルは(1・2・16)

$$\phi(P,t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega)\, \Phi(P;\omega)\, e^{i\omega t} d\omega \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot3\cdot1)$$

のように書かれ，また

$$\phi(P,t) = \int_0^t v(\tau)\, \phi^{\delta}(P;t-\tau)\, d\tau \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot3\cdot2)$$

とも書ける。

遠場では(2・3・1)を(3・3・1)に代入して

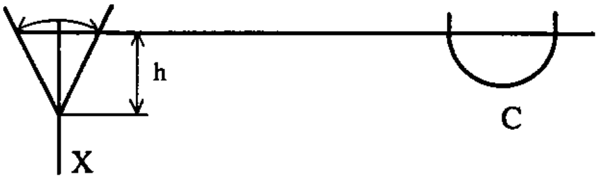
$$\phi(P,t) \xrightarrow[P \gg 0]{} \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega)\, H^{\pm}(K)\, e^{-|K|y \mp iKx + i\omega t} d\omega \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot3\cdot3)$$

こゝに　$K=\omega\ |\omega|\ /\ g$

$$\overline{H}^{\pm}(-K)=\overline{H^{\pm}(K)} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot3\cdot4)$$

特に水面変位は

$$\eta(x,t)=\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t}\bigg|_{y=0}\to-\frac{1}{2\pi g}\int_{-\infty}^{\infty}U(\omega)\,H^{\pm}(K)\ e^{\mp iKx+i\omega t}\ \omega\, d\omega,\cdots \quad (3\cdot3\cdot5)$$



具体例として水槽端のフラップ式造波機を考えよう。周波数領域では(2・2・2)より

$$\Phi(P,\omega)\ =\ 2\int_C\frac{\partial\Phi}{\partial n}S\ \ ds\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot3\cdot6)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial n}&=\left(1-\frac{y}{h}\right) &&\text{for}\quad 0<y<h\\ &=\ 0 &&\text{for}\quad y>h\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot3\cdot7)$$

(2・3・2)のコッチン関数は今はxの負の方向の波だけ必要で

$$\begin{aligned}H^{\mp}(K)&=-2\ e^{-iKX}\int_0^h e^{-Ky}\left(1-\frac{y}{h}\right)dy\\ &=-\frac{2}{K}\ e^{-iKX}\left[1-\frac{1-e^{-Kh}}{Kh}\right],\\ &\equiv e^{-iKX}\ H_F(K)\ ,\end{aligned} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot3\cdot8)$$

とおいておくと(3・3・5)によりxの負方向に進む波は

$$\eta_F(x,t)\longrightarrow-\frac{1}{2\pi g}\int_{-\infty}^{\infty}U(\omega)\ H_F(K)\ e^{-iK(X-x)+i\omega t}\ \omega\, d\omega\ ,\ \cdots\cdots\cdots \quad (3\cdot3\cdot9)$$

これを重畳積分に直すと

$$\eta_F(x,t)\longrightarrow\int_0^t v(\tau)\ W(x,t-\tau)\ d\tau\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot3\cdot10)$$

$$W(x,t) = -\frac{1}{2\pi g}\int_{-\infty}^{\infty} H_F(K)\, e^{-iK(X-x)+i\omega t}\,\omega\, d\omega\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot3\cdot11)$$

でこれは ϕ^{δ} の作る波である。

一般に x の正方向から入ってくる波は (3・3・9) の形となる。

今それを

$$\eta_W(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\, e^{iKx+i\omega t}\, d\omega\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot3\cdot12)$$

と表わす事にすると速度ポテンシャルは

$$\phi_W(P,t) = \frac{g}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\, e^{-|K|y+iKx+i\omega t}\,\frac{d\omega}{\omega}\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot3\cdot13)$$

となる。

この造波機による波では

$$A(\omega) = -\frac{\omega}{g}\, U(\omega)\, H_F(K)\, e^{-iKX}\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot3\cdot14)$$

所で (2・3・12) において $x=0$ とすると

$$\eta_W(0,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot3\cdot15)$$

であるから $A(\omega)$ は原点における水面変位のフーリエ変換と考えられる。

今

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iKx+i\omega t}\, d\omega = \int_0^{\infty}\cos(Kx+\omega t)\, d\omega$$

$$= D(x,t)\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot3\cdot16)$$

とおくと

$$\eta_W(x,t) = \int_0^{t}\eta_W(0,t)\ D(x,t-\tau)\, d\tau\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot3\cdot17)$$

と表わされ，Dはフレネル積分で表わされる。

3.4 力とモーメント，可逆定理

i モードの速度振巾 $U_i(\omega)$なる動揺による j モードの一般力 F_{ij}は (2・5・1) をフーリエ逆変換して

$$F_{ij}(t) = \frac{\rho i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\, U_i(\omega)\, f_{ij}(\omega)\, d\omega\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot4\cdot1)$$

一方 j モードの速度振巾 $U_j(\omega)$で i モードの一般力は

$$F_{ji}(t) = \frac{i\rho}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\, U_j(\omega)\ f_{ij}(\omega)\, d\omega\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot4\cdot2)$$

所で

$$U_{\binom{i}{j}}(\omega) = \int_0^{\infty} v_{\binom{i}{j}}(t)\, e^{-i\omega t}\, d\omega\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot4\cdot3)$$

で今

$$F^{\delta}_{ij}(t) = \frac{\rho}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_{ij}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot4\cdot4)$$

とおくと可逆定理(2・5・4)により

$$F^{\delta}_{ij}(t) = \int_0^t v_i(\tau)\, F^{\delta}_{ij}(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t v_i(\tau)\, F^{\delta}_{ji}(t-\tau)\, d\tau \quad , \qquad \cdots\cdots (3\cdot4\cdot5)$$

$$F_{ji}(t) = \int_0^t v_j(\tau)\, F^{\delta}_{ji}(t-\tau)\, d\tau \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot4\cdot6)$$

となら

$$F_{ij}(t) = F_{ji}(t) \qquad \text{for} \quad v_i(t) = v_j(t) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot4\cdot7)$$

を得る。

これは又２つ以上の物体の時にも成立つ事は 2.5 節で述べた通りである。

波強制力についても，入射波が(3・3・12)のように表わされるとすれば(2・5・7)を逆変換して

$$E_j(t) = -\frac{\rho g}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\, H(K)\, e^{i\omega t}\, d\omega \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot4\cdot8)$$

それ故

$$E^{\delta}_j(t) = -\frac{\rho g}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(K)\, e^{i\omega t}\, d\omega \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot4\cdot9)$$

なる関数を導入し，(3・3・15)を考えると

$$E_j(t) = \int_0^t \eta_W(0,\tau)\, E^{\delta}_j(t-\tau)\, d\tau \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot4\cdot10)$$

これを又(3・3・17)を使って任意の点 x の波高により表現する事も出来る。

可逆性の観点からは(3・4・8)と(3・3・5)を較べて

$$-\rho g\, A(\omega) = \frac{\omega}{g}\, U(\omega)\, e^{\mp iKX} \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot4\cdot11)$$

ならば

$$\eta(x,t)\Big|_{|x|\gg 1} \doteqdot E_j(t) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot4\cdot12)$$

これが非定常の場合のハスキンドの関係である。

3.5 エネルギー

浮体が時間 t までになす仕事は静水圧を除いて

$$W(t) = -\int_0^t dt \int_C p\,\frac{\partial\phi}{\partial n}\, ds = -\rho\int_0^t dt \int_C \frac{\partial\phi}{\partial t}\,\frac{\partial\phi}{\partial n}\, ds \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots (3\cdot5\cdot1)$$

グリーンの定理と水面条件から

$$-\rho\int_C \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial n}ds = \rho\iint_D \nabla\frac{\partial\phi}{\partial t}\nabla\phi\,dx\,dy - \rho\int_F \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial y}dx$$

$$= \frac{\rho}{2}\frac{d}{dt}\iint_D (\nabla\phi)^2\,dx\,dy + \frac{\rho g}{2}\frac{d}{dt}\iint_F \eta^2\,dx \quad ,$$

$$= \frac{d}{dt}(T+V) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot5\cdot2)$$

それ故

$$W(t) = \left[T+V\right]_{t=0}^{t} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot5\cdot3)$$

こゝにTは運動エネルギー，Vはポテンシャルエネルギー

特に

$$W(\infty) = -\rho\int_0^\infty dt\int_C \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial n}ds$$

$$= \frac{-\rho}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\omega\,d\omega\int_C \Phi(\omega)\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial n}ds$$

$$= \frac{\rho}{2\pi i}\int_0^\infty \omega\,d\omega\left[\int_C\left(\Phi(\omega)\frac{\partial\overline{\Phi}}{\partial n} - \overline{\Phi}\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)ds\right] , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot5\cdot4)$$

となるから(2・6・3) (2・6・4)によりこれは放射波が持ち去るエネルギーとなる。

プランシュレルの定理は，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau)\,f_2(t+\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega)\,\overline{F_2}(\omega)\,e^{-i\omega t}d\omega \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot5\cdot5)$$

であるから例えば入射波について(3・3・12)より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta_W(x,\tau)\,\eta_W(x,t+\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\,\overline{A}(\omega)\,e^{-i\omega t}d\omega \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots (3\cdot5\cdot6)$$

これは波浪統計でよく知られた関係でコレログラムのフーリエ変換はエネルギースペクトル密度に等しい事を示す。

同様な式が(3・3・5)に対しても成立つ。

3.6 運動方程式と過渡応答

簡単の為に上下ゆれを考えよう。

運動方程式は周波数面で考えるのが簡単で，今入射波が(3・3・12)で与えられるならば波の力は(3・4・8)のようになるから

$$(-\omega^2 M + \rho g B)\,Y = +\rho\,\omega^2 f_{ij}\,Y - \rho g A(\omega)\,H(K)$$

今

$$Z(\omega) = i\left(\omega M - \frac{\rho g B}{\omega}\right) - i\rho\omega f_{ij}\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot6\cdot1)$$

とおくと

$$i\omega Y Z = -\rho g A(\omega) H(K)\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot6\cdot2)$$

となり

$$Y(\omega) = \rho g i \frac{A(\omega)}{\omega Z(\omega)} H(K)\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot6\cdot3)$$

$$y(t) = \frac{\rho g i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(\omega)}{\omega Z(\omega)} H(K) e^{+i\omega t} d\omega\ ,$$

をうる。

また波がなく従って(3・6・2)の右辺が0で

最初に $y(0) = y_0\ ,\quad \dot{y}(0) = 0\ ,$ $\cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot6\cdot4)$

として，つまり押えていて $t=0$ ではなすならば

$$Y(\omega)/y_0 = \frac{Z(\omega) + i\rho g B/\omega}{i(\omega)\ Z(\omega)}\ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots (3\cdot6\cdot5)$$

$$y(t)/y_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Z(\omega) + \rho g i B/\omega}{\omega\ Z(\omega)} e^{+i\omega t} d\omega\ ,$$

この時は(3・3・5)によって，浮体を充分離れた所の水面変位は

$$\eta(x, t) \to -\frac{\rho B}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{H^{+}(K)\, e^{-iKx+i\omega t}}{\omega\ Z(\omega)} d\omega\ , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3\cdot6\cdot6)$$

$$\because\quad U(\omega) = i\omega Y - y_0$$

それ故上式は(3・6・3)において $A(\omega)=1$，つまりパルス波を浮体にあてた時の浮体の上下ゆれに等しい。

竹沢はパルス波を起して浮体の運動をフーリエ変換して波浪中の応答関数を実験的に求めているが上式によれば発散波によって求まる事になる。

また上式を t の大きい所で漸近展開すると

$$\eta(x, t) \xrightarrow[\frac{g t^2}{4x} \gg 1]{} \frac{B y_0}{4\sqrt{2\pi}} \frac{g^{\frac{3}{2}} t^2}{x^{\frac{5}{2}}} \mathcal{R}e\left[\frac{H^{+}\left(\frac{g^2 t^2}{4x^2}\right)}{Z\left(\frac{g t}{2x}\right)} e^{\frac{i g}{4x} t^2}\right]\ , \qquad \cdots\cdots (3\cdot6\cdot7)$$

となる。

つまり波高の時間的変化の envelope は波浪中の周波数応答になっている。

参 照 文 献

1) 造船協会60周年記念叢書第2巻

2) Stoker, J.J., "Water Waves", The mathematical theory with applications, Interscience Publishers, New York, 1957

3) Wehausen, J.V. & Laitone, "Surface Waves", Hundbuch der Physik, Bd.9, Springer, 1960

4) Havelock, T.H., "Collected Papers"

5) Courant und Hilbert, "Methoden der Mathematishen Physik", Bd. 1 & 2, Springer, 1931

6) Morse and Feshbach, "Methods of Theoretical Physics", Part I & II, MacGraw-Hill, 1953

7) Bergmann & Shiffer, "Kernel Functions and Elliptic Equations in Mathematical Physics", Academic Press, 1953

8) Titchmarsh, E.C., "Introduction to the Theory of Fourier Integrals", 2nd. ed. Oxford, 1937

9) Kellog, O.D., "Foundation of Potential Theory", New York, 1929

10) Witham, G.B., "Linear and Nonlinear Waves", John-Wiley & Sons. 1973

B 1) "波の中の船の横揺れ運動の理論について"及び同続報防大理工学研究報告第3巻1号 昭和40年5月，第3巻3号，昭和41年

B 2) "船体運動のイムパルス応答とその発散波について" 同上 第11巻2号，昭和48年9月

B 3) "On the Theory of Wave-Free Ship Forms" 防大英文紀要，Vol. 7, No.1, June. 1967

B 4) "On Boundary Value Problems of an Oscillating Body Floating on Water"，同上，Vol.8，No.1，Oct.1968

B 5) "水面で動揺する2次元平板に働く流体力について"及び続報関西造協誌154号昭和49年，163号，昭和51年，小松共著

B 6) "逆時間速度ポテンシャルについて"，同上，159号，昭和50年

B 7) "変位ポテンシャルについて"，同上，169号，昭和53年

B 8) "水の波の理論における内部問題について"，西部造船会報57号，昭和54年，経塚共著