浅水波の一次元理論

別所正利

One dimensional theory of shallow water wave

Masatoshi Bessho

浅水で平面波のみ存在するような場合，波は一次元的に伝播して行くので大変簡単である。浅水の仮定では速度は深さ方向に不変であるから物体としては水平平板と垂直で底まで達する平板しか扱えないけれど見通しが楽である。

内容目次

1. 解と力およびモーメント*

$e^{i\omega t}$ なる因子を除いて速度ポテンシャルの満たすべき条件は

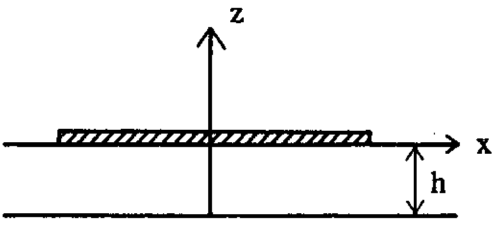
$$\varphi_{xx}(x)+K^2\varphi(x)=0\ ,\ K^2=\frac{\omega^2}{gh} \qquad \cdots\cdots(1\cdot1)$$

又平板の垂直変位を $z(x)$とすると

$$\varphi_{xx}(x)+\frac{i\omega}{h}\zeta(x)=0\ ,\cdots(1\cdot2)$$

圧力 $p(x)$は静水圧を除いて

$$p(x)/\rho=-i\omega\varphi(x)\ ,\ \cdots(1\cdot3)$$



* 「浅い水面に浮ぶ平板の問題」，昭48. 10. 28

日本造船学会運動性能研究委員会 1985. 10. 8

今
$$\varphi(x) = -i\omega X\phi(x) \quad ,$$
$$\zeta(x) = X z(x) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot4)$$

Xは運動振幅

又，入射波は（振幅を a として）x の正方向から来る波に

$$\varphi_0(x) = i\frac{ga}{\omega}\phi_0(x) \quad , \qquad \phi_0(x) = e^{iKx}$$
$$\zeta_0 = a\,e^{iKx} \quad , \qquad z_0(x) = \frac{-\omega^2}{g}e^{iKx} \qquad \cdots\cdots\ \cdots\cdots (1\cdot5)$$

散乱ポテンシャルは

$$\varphi_d(x) = \frac{iga}{\omega}\phi_d(x) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot6)$$

のように規格化しておこう。

そうすると(1・1)，(1・2)，(1・3)は

$$\phi_{xx} + K^2\phi = 0 \quad , \quad \text{for free surface} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot1')$$

$$\phi_{xx} = \frac{z}{h} \quad , \quad \text{for flat plate} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot2')$$

$$p/\rho = -\omega^2 X\phi \, , \quad (p_0 + p_d)/\rho = ga(\phi_0 + \phi_d) \, , \qquad \cdots\cdots (1\cdot3')$$

力とモーメントは

$$Z = \int p\,dx = -\rho\omega^2 X\int\phi\,dx \quad ,$$
$$M = \int px\,dx = -\rho\omega^2 X\int\phi x\,dx \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot7)$$

又，左右方向には速度（$u = \phi_x$）は z 一方向に一定と考えているので垂直平板としては底まで達しているものしか考えられず，それについて水平力は

$$S = ph = -\rho\omega^2 hX\phi(x) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot8)$$

又モーメントは０である。

水平平板の上下動について下添字２を附すると

$$z_2(x) = 1 \qquad \text{for} \quad |x| < b \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot9)$$

ローリングについて下添字３を附すると

$$z_3(x) = x \qquad \text{for} \quad |x| < b \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot10)$$

$$\int_{-b}^{b}\phi_2\,dx = f_{2,2} \quad , \qquad \int_{-b}^{b}\phi_3\,x\,dx = f_{33} \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot11)$$

とおくと

$$Z = -\rho\omega^2 X_2 f_{22} \quad ,$$
$$M = -\rho\omega^2 X_2 f_{3,3} \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot12)$$

又垂直平板については左右動しか考えられないでそれを添字１で示すと

$$S = -\rho\omega^2 X_1 f_{1,1} \quad , \qquad f_{1,1} = h\,\phi_1(x) \quad , \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot13)$$

波の強制力は垂直平板では完全反射であるから平板が $x = \xi$ の所にあると

$$\phi_d(x) = e^{-iKx+2iK\xi}, \quad \phi_0(x) = e^{iKx}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot14)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}(\phi_0 + \phi_d)\Big|_{x=\xi} = 0 \right)$$

故

$$S_W = 2\rho g a h\, e^{iK\xi}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot15)$$

水平平板については後に求めるが

$$\begin{bmatrix} Z_W \\ M_W \end{bmatrix} = \rho g a \int (\phi_0 + \phi_d) \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} dx, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot16)$$

$$\int_{-b}^{b} \phi_d\, z_j\, dx = h\int_{-b}^{b} \phi_d\, \phi_{jxx}\, dx = h\int_{-b}^{b} \phi_j\, \phi_{dxx}\, dx$$

$$= -\int_{-b}^{b} \phi_j\, z_0\, dx = -\int_{-b}^{b} \phi_j\, e^{iKx} dx, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot17)$$

それ故今

$$H_j(K) = \int_{-b}^{b} e^{iKx} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} - \phi_j \right) dx, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot18)$$

とおくと

$$\begin{bmatrix} Z_W \\ M_W \end{bmatrix} = \rho g a \begin{bmatrix} H_2 \\ H_3 \end{bmatrix}, \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (1\cdot19)$$

2. 平　板（水平）

i）上下動

$z = 1$ とおいて

$$\phi(x) = \frac{1}{h}\left(\frac{x^2}{2} + c \right) \qquad \text{for} \quad |x| < b,$$

$$\phi(x) = A^{\pm} e^{\mp iKx} \qquad \text{for} \quad x \gtrless \pm b \quad \}$$

$$\phi(b) = \frac{1}{h}\left(\frac{b^2}{2} + c \right) = A^{+} e^{-iKb} = A^{-} e^{-iKb}$$

$$\phi_x(b) = \frac{1}{h}(b) = -iKA^{+} e^{-iKb}$$

$$\therefore \quad A^{+} = A^{-} = \frac{ib}{Kh} e^{iKb},$$

$$c = -\frac{b^2}{2} + \frac{ib}{K},$$

$$f_{22} = \frac{1}{h}\int_{-b}^{b} \left[\frac{x^2 - b^2}{2} + \frac{ib}{Kh} \right] dx = -\frac{2b^3}{3h} + \frac{2ib^2}{Kh},$$

ⅱ）横ゆれ

$z=x$とおくと

$$\phi(x)=\frac{1}{h}\left(\frac{x^3}{6}+cx\right)$$

$$\phi(b)=\frac{b}{h}\left(\frac{b^2}{6}+c\right)=A^{+}e^{-iKb}=-A^{-}e^{-iKb}\ ,$$

$$\phi_x(b)=\frac{1}{h}\left(\frac{b^2}{2}+c\right)=-iKA^{+}e^{-iKb}\ ,$$

$$A^{+}=-A^{-}=-\frac{b^3e^{iKb}}{3h(1+iKb)}\ ,$$

$$c=-\frac{b^2}{6}-\frac{b^2}{3(1+iKb)}\ ,$$

$$f_{33}=\frac{b^5}{15h}+\frac{1}{h}\frac{2b^3}{3}c=-\frac{2b^5}{45h}-\frac{2b^5}{9h(1+iKb)}$$

$$=-\frac{b^5}{h}\left\{\frac{2}{45}+\frac{2}{9(1+K^2b^2)}\right\}+\frac{2iKb^6}{9h(1+K^2b^2)}\ ,$$

ⅲ）散乱　$\phi_0=e^{iKx}$とすると　$z_0=-\frac{\omega^2}{g}e^{iKx}$

以下 ϕ_d を ϕ と記すと

$$\phi=-e^{iKx}+C+Dx\ ,\qquad \text{for}\quad |x|<b$$

$$=A^{\pm}e^{\mp iKx}\ ,\qquad \text{for}\quad |x|>b$$

$$\left.\begin{aligned}C+Db-e^{iKb}&=A^{+}e^{-iKb}\\ C-Db-e^{-iKb}&=A^{-}e^{-iKb}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}D-iKe^{iKb}&=-iKA^{+}e^{-iKb}\\ D-iKe^{-iKb}&=iKA^{-}e^{-iKb}\end{aligned}\right\}\ ,$$

$$\left.\begin{aligned}iK(C+Dh)+D&=2iKe^{iKb}=iKC+(1+iKb)D\\ iK(C-Dh)-D&=0=iKC-(1+iKb)D\end{aligned}\right\}$$

$$C=e^{iKb}\ ,\qquad D=\frac{iKe^{iKb}}{1+iKb}\ ,$$

$$A^{+}=e^{2iKb}-\frac{D}{iK}e^{iKb}=\left(1-\frac{1}{1+iKb}\right)e^{2iKb}=\frac{iKb}{1+iKb}e^{2iKb}\ ,$$

$$(A^{-}+A^{+})iKe^{-iKb}=iK(e^{iKb}-e^{-iKb})$$

$$\therefore \quad A^{-} + A^{+} = e^{2iKb} - 1$$

$$A^{-} = \frac{e^{2iKb}}{1+iKb} - 1 \quad ,$$

$$\int_{-b}^{b} (\phi_0 + \phi_d)\, dx = 2bC = 2be^{iKb} = 2iKhA_2^{+}$$

$$\int_{-b}^{b} (\phi_0 + \phi_d)\, x\, dx = \frac{2}{3} b^3 D = \frac{2iKb^3 e^{iKb}}{3(1+iKb)} = 2iKhA_3^{-}$$

次に $\phi_0 = e^{-iKx}$ つまり x の正方向に向う入射波の場合は同様にして

$$C = e^{iKb} \quad , \qquad D = \frac{-iK}{1+iKb} e^{iKb} \quad ,$$

$$A^{+} = \frac{e^{2iKb}}{1+iKb} - 1 \quad , \qquad A^{-} = \frac{iKb}{1+iKb} e^{2iKb} \quad ,$$

となり力の方も上下方向は同じでモーメントのみ符号異なる。それ故，原点に垂直壁がある場合は両者を加え合せて

$$\phi_0 = e^{iKx} + e^{-iKx}$$

$$\left.\begin{aligned} \phi_0 + \phi_d &= 2C \quad , \quad \text{for} \quad |x| > b \\ &= e^{2iKb-iKx} + e^{iKx}, \quad \text{for} \quad x > b \\ &\quad\; e^{2iKb+iKx} + e^{-iKx}, \quad \text{for} \quad x < b \end{aligned}\right\}$$

波の強制力は

$$\left.\begin{aligned} Z_W &= \rho g a \int_0^b (\phi_0 + \phi_0)\, dx = \rho g a 2bC = \rho g a 2b e^{iKb} \\ M_W &= \frac{h}{2} Z_W \end{aligned}\right\}$$

又，壁に働く力は

$$S_W = (\phi_0 + \phi_d)_{x=0} h = 2\rho g a h e^{iKe} = \frac{h}{b} Z_W$$

iv）同等関係

$$Z_W = 2\rho g a b e^{iKb} = -2\rho g a\, iKh\, A_2^{-}$$

$$M_W = 2\rho g a\, iKh\, A_3^{-}$$

$$f_{22} = -\frac{2b}{3h} + i\frac{2Kh}{b} \cdot |A_2^{+}|^2$$

$$f_{33} = -\frac{2b^5}{45b}\left(1 + \frac{5}{1+K^2e^2}\right) + 2iKh\,|A_3^{+}|^2$$

$$A_d^+ + A_d^- + 1 = e^{2iKb} = -A_2^+ / A_2^+$$

$$-A_d^+ + A_d^- + 1 = \frac{1 - iKb}{1 + iKb} e^{2iKb} = -A_3^+ / A_3^+$$

$$A_2^+ = |A_2| e^{i\alpha_2} \ , \quad A_3^- = |A_3| e^{i\alpha_3}$$

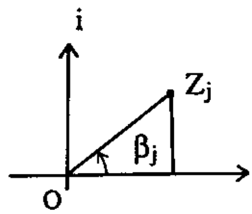
$$\alpha_2 = Kb + \frac{\pi}{2} \quad , \quad \alpha_3 = \pi + Kb - \tan^{-1}(Kb)$$

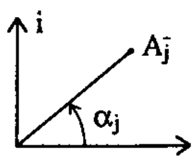
$$|A_2| = \frac{b}{Kh} \quad , \quad |A_3| = \frac{b^3}{3h\sqrt{1 + K^2 b^2}}$$

V）運動方程式

単位入射波中の運動は

$$\left.\begin{aligned} M\ddot{X}_2 + \rho g(2b)X_2 &= Z + Z_W \\ I\ddot{X}_3 + \rho g M \cdot GM X_3 &= M + M_W \end{aligned}\right\}$$





今，$i\omega X_2 = U_2$ ，$i\omega X_3 = U_3$

とおき上式を

$$\left.\begin{aligned} U_2 \ Z_2 &= Z_W \\ U_3 \ Z_3 &= M_W \end{aligned}\right\}$$

と書くと

$$Z_2 = -i\rho\omega f_{22} + i\left(\omega M - \frac{2\rho g b}{\omega}\right)$$

$$= 2\rho\omega K h |A_2|^2 + i\left[\omega M + \frac{2\rho b^3 \omega}{3h} - \frac{2\rho g b}{\omega}\right],$$

$$Z_3 = i\left(\omega I - \frac{\rho g M \overline{GM}}{\omega}\right) - i\rho\omega f_{33}$$

$$= 2\rho\omega K h |A_3|^2 + i\left[\omega I + \frac{2b^5}{45h}\left(\frac{G + K^2 b^2}{1 + K^2 b^2}\right) - \frac{\rho g M \overline{GM}}{\omega}\right]$$

$$Z_j = 2\rho\omega K h |A_j|^2 \frac{e^{i\beta_j}}{\cos\beta_j} \ ,$$ とおくと

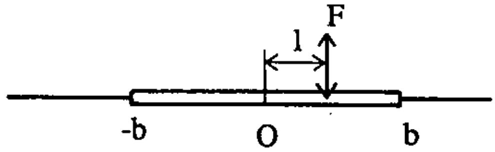
$$U_j = \frac{2\rho g i K h A_j^-}{2\rho\omega K h |A_j|^2} e^{+i(x_j - \beta_j)} \cos\beta_j = \frac{i g e^{+i(\alpha_j - \beta_j)}}{\omega |A_j^-|} \cos\beta_j$$

波以外のDampingがある場合も次のようにかくことにしよう。

$$Z_j = (1+r)\cdot 2\rho\omega K h\,|A_j|^2 e^{i\beta_j}/\cos\beta_j \quad ,$$

vi）造波推進

図の点 ℓ に F なる周期力が加わると運動は



$$X_2 = \frac{F}{i\omega Z_2}\ ,\ X_3 = \frac{\ell F}{i\omega Z_3}\ ,$$

出て行く波は

$$A^+ = -\frac{\omega^2}{g}(X_2 A_2^+ + X_3 A_3^+),$$

$$\text{for}\quad x > 0$$

$$A^- = -\frac{\omega^2}{g}(X_2 A_2^- + X_3 A_3^-) = -\frac{\omega^2}{g}(X_2 A_2^+ - X_3 A_3^+),\quad x < 0$$

今，$A^+ = 0$ となるためには

$$X_2 / X_3 = -A_3^+ / A_2^+ = \frac{Z_3}{\ell Z_2}$$

それ故

$$\frac{|A_3|^2}{\ell|A_2|^2}\frac{\cos\beta_2}{\cos\beta_3}\ e^{i(\beta_3-\beta_2)} = \frac{-A_3^+}{A_2^+} = +\frac{|A_3^+|\ e^{i\beta_3}}{|A_2^+|\ e^{i\beta_2}}$$

$$\ell = +\ \frac{A_3}{A_2}\ \frac{\cos\beta_2}{\cos\beta_3}\ ,$$

$$\left|\frac{A_3}{A_2}\right| = \frac{h^3}{3h\sqrt{(1+K^2b^2)}} \times \frac{Kh}{b} = \frac{K b^2}{3\sqrt{1+K^2 b^2}}$$

この時 $\quad A^- = -2\frac{\omega^2}{g}X_2 A_2^+ = +2i\frac{\omega}{g}\frac{A_2^+}{Z_2}F$

$$= i\frac{(\cos\beta_2)F}{\rho g K h|A_2|}\ e^{i(\alpha_2-\beta_2)} = i\frac{\cos\beta_2}{\rho g b}F\ e^{i(\alpha_2-\beta_2)}$$

推力は $\qquad T = \frac{\rho g B}{2}|A^-|^2 \quad ,\qquad$ （ B は奥行幅）

明らかに $\beta_2 = 0$ つまり上下同調時に T は最大となる。

F を得るために回転円板上の偏心(r)重量(w)を考えると

$$F = \frac{w}{g}r\omega^2 / B \quad ,\qquad \text{〔 } B \text{ は } y \text{ 方向の幅〕}$$

$$\therefore \quad A^{-} = \frac{w r \omega^2}{\rho g^2 b B} = \frac{w}{\rho y B b} \cdot \frac{r \omega^2}{g}$$

一方，上下同調故

$$\omega^2 = \frac{2 \rho g b B}{M + \frac{2 \rho B b^3}{3 h}}$$

$$\therefore \quad A^{-} = \frac{2 w r}{g \left[M + \frac{2 \rho B b^3}{3 h} \right]} \quad ,$$

平板は抵抗Rに　合うよう動き出すからその速度をVとすると，

$$R = \frac{\rho}{2} B b V^2 C_R$$

$$= T = \frac{\rho g B}{2} | A^{-} |^2$$

$$\therefore \quad V = | A | \sqrt{\frac{g}{b C_R}}$$

効率は　$\eta = \dfrac{RV}{T V_W} = \dfrac{V}{\sqrt{g h}} = \dfrac{| A |}{\sqrt{b h C_R}}$

vii）反射波と透過波

正の正方向からの単位入射波に対し，反射波，透過波の振幅は

$$\left. \begin{aligned} A_R &= A_d^{+} - \frac{\omega^2}{g} \left(X_2 A_2^{+} + X_3 A_3^{+} \right) , \\ A_T &= 1 + A_d^{-} - \frac{\omega^2}{g} \left(X_2 A_2^{-} + X_3 A_3^{-} \right) , \end{aligned} \right\}$$

所で

$$\frac{\omega^2}{g} X_j A_j^{-} = e^{i (2\alpha_j - \beta_j)} \cos \beta_j$$

故

$$\left. \begin{aligned} 1 + A_d^{-} + A_d^{+} &= e^{2 i \alpha_2} \\ 1 + A_d^{-} - A_d^{+} &= e^{2 i \alpha_3} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} A_R + A_T &= e^{2 i \alpha_2} \left(1 - 2 e^{-i \beta_2} \cos \beta_2 \right) = - e^{2 i (\alpha_2 - \beta_2)} \quad , \\ A_T + A_R &= e^{2 i \alpha_3} \left(1 - 2 e^{-i \beta_3} \cos \beta_3 \right) = - e^{2 i (\alpha_3 - \beta_3)} \quad , \end{aligned} \right\}$$

$A_T = 0$ なる為には

$$\alpha_2 - \beta_2 - (\alpha_3 - \beta_3) = (2 n + 1) \frac{\pi}{2}$$

$A_R = 0$ なる為には

$$\alpha_2 - \beta_2 - (\alpha_3 - \beta_3) = 4 n \pi$$

nは正負の整数

それ故 $A_T = 0$ に対して

$$\alpha_2 = \frac{\pi}{2} + Kb \ , \quad \alpha_3 = \pi + Kb - \tan^{-1} Kb$$ を代入すると

$$\beta_3 - \beta_2 = (2n+1)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} Kb \underset{(\mathrm{mod}.\, n\pi)}{=} -\tan^{-1} Kb$$

のようになる。

viii) 波消し

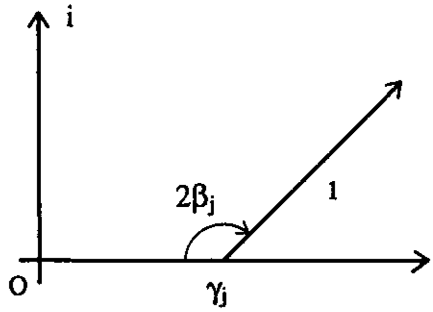
前節で

$$\frac{\omega^2}{g} X_j A_j = \frac{e^{i(2\alpha_j - \beta_j)}}{1+r_j} \cos \beta_j$$

とし波減衰の r_j 倍の減衰を追加すると

$$A_R + A_T = \frac{e^{2i\alpha_2}}{1+r_2}\left(r_2 - e^{-2i\beta_2} \right)$$

$$A_T - A_R = \frac{e^{2i\alpha_3}}{1+r_3}\left(r_3 - e^{-2i\beta_3} \right)$$



それ故，最も簡単なcaseは

$$A_T = A_R = 0 \quad ,$$

$$\text{for} \quad \begin{pmatrix} r_2 = r_3 = 1 \\ \beta_3 = \beta_3 = 0 \end{pmatrix}$$

$A_T = 0$ の為には

$$\frac{e^{2i\alpha_2}}{1+r_2}\left(r_2 - e^{-2i\beta_2} \right) = \frac{e^{2i\alpha_3}}{1+r_3}\left(r_3 - e^{-2i\beta_3} \right)$$

これは複雑な関係である。

3. 壁と平板

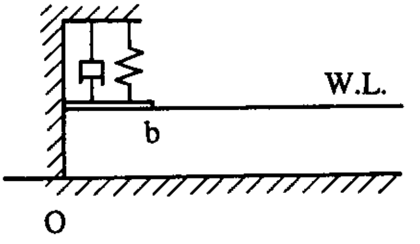
i）　壁と平板（右図）

平板の上下動による波は

$$-\frac{\omega^2}{g} X_2 A_2^+$$

散乱波は（入射波を除いて）

$$e^{2iKb-iKx}$$



それ故先ず，反射波が0になる為には

$$e^{2iKb}\frac{\omega^2}{g} X_2 A_2^+ = \frac{-i\omega}{g}\frac{Z_W A_2^+}{Z_2}$$

$$Z_W = -2\rho g\, iKh\, A_2^-$$

$$Z_2 = \frac{1}{2} Z_{20} \ , \quad (Z_{20}\text{は幅}2b\text{の場合の impedance})$$

$$= \frac{1+r}{2}\cdot 2\rho\omega Kh\,|A_2|^2\, e^{i\beta_2} \operatorname{cosec}\beta_2 \ ,$$

$$\frac{-i\omega}{g}\frac{Z_W A_2^+}{Z_2} = \frac{-2}{1+r} e^{2i\alpha_2 - i\beta_2}\cos\beta_2$$

$\therefore$　$r = 1$，$\beta_2 = 0$ の時反射波はなくなる。

次に板の上下動で壁に働く水平力は

$$S = -\rho\omega^2 h X_2 \phi_2(0) = -\rho\omega^2 X_2\left(\frac{ib}{K} - \frac{b^2}{2}\right) ,$$

波の水平力は

$$S_W = \frac{h}{b} Z_W = -\frac{2\rho g h}{b}\, iKh\, A_2^-$$

それ故　$S + S_W = 0$ なる為には

$$\frac{h}{b} Z_W = \rho\omega^2 X_2\left(\frac{ib}{K} - \frac{b^2}{2}\right)$$

$$i\omega X_2 = \frac{Z_W}{Z_2}$$

$$\frac{h}{b} = \frac{\rho\omega}{Z_2}\left(\frac{b}{K} + \frac{ib^2}{2}\right)$$

$$Z_2 = (1+\gamma)\rho\omega K h\,|A_2|^2\ e^{i\beta_2}/\cos\beta_2$$

$$= \frac{\rho\omega b^2}{Kh}\left(1+\frac{iKb}{2}\right)$$

$$|A_2|^2 = \left(\frac{b}{Kh}\right)^2$$

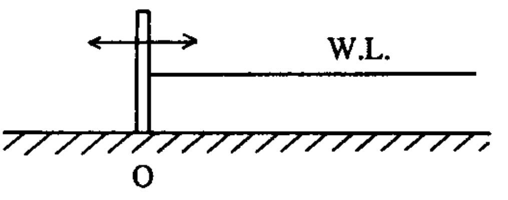
$$\frac{e^{i\beta_2}}{\cos\beta_2} = \frac{1+\frac{iKb}{2}}{1+\gamma} = 1 + i\tan\beta_2$$

それ故 $\gamma=0$ ならば

$$\tan\beta_2 = \frac{Kb}{2}$$

ii）動く垂直壁

振巾 X_1 で壁が左右に動くと



$$\varphi(x) = A_1^+\ e^{-iKx}$$

$$i\omega X_1 = \varphi_x(0) = -iKA_1^+$$

$$A_1^+ = -\frac{\omega}{K}X_1$$

左右力

$$S_1 = -i\omega\rho h\varphi(0) = -\omega\rho h A_1^+$$

$$= \frac{i\rho\omega^2}{K}hX_1 = i\rho g h^2 K X_1$$

波振幅は

$$\zeta = -\frac{K^2 h}{i\omega}\varphi = -\frac{i\omega}{g}\varphi$$

$$= \frac{i\omega^2}{gK}X_1\ e^{-iKx} = i\,hKX_1\,e^{-iKx}$$

一方散乱波（単位入射波の反射波）は e^{-iKx}

それ故

$$iKh\,X_1 = -1\quad,\quad X_1 = \frac{i}{Kh}\quad,\quad A_1 = -\frac{i\omega}{K^2 h}$$

とおくと反射波は消える。

この時

$$\varphi(x) = A_1^+\ e^{-iKx} = -\frac{\omega}{K^2}\times\frac{i}{h}\ e^{-iKx}$$

$$\varphi_x(x) = -\frac{\omega}{Kh}\ e^{-iKx} \quad ,$$

$$\varphi_{0x}(x) = -\frac{gK}{\omega}\ e^{iKx} \quad ,$$

それ故壁の動きは入射波粒子のそこの動きに等しい。

運動方程式は

$$-\omega^2 M X_1 + k X_1 = -S_1 + S_W = -i\rho g h^2 K X_1 - 2\rho g h$$

$$i\omega X_1 = \frac{S_W}{Z_2} = \frac{-2\rho g h}{Z_2}$$

$$i\omega Z_2 = -\omega^2 M + k + i\rho g h^2 K$$

$$Z_2 = \frac{\rho g K h^2}{\omega} + i\left(\omega M - \frac{k}{\omega}\right)$$

同調時には

$$i\omega X_1 = -\frac{2\rho g h\omega}{\rho g K h^2} = -\frac{2\omega}{Kh}$$

$$\therefore \quad X_1 = \frac{2i}{Kh}$$

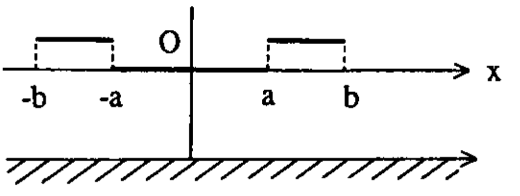
これは波の消える時の倍であるから結局何時ものように波以外の減衰を波と同じだけ附加すればよい。

又壁に働く力が0になる為には

$$S_1 + S_W = 0 \quad , \quad i\rho g h^2 K X_1 = -2 g h a$$

$$K X_1 = \frac{2ia}{h} \, ,$$

なお S_1 は X_1 と 90° 位相が異なる故added mass term等,つまりReactance成分はない！



4. 端部上下可動平板

図の $a \sim b$ の部分が上下動するとする。$\pm a$ の部分は静止しているとする。

左右対称に上下するポテンシャルを ϕ_4

左右反対称に上下するポテンシャルを ϕ_5

としよう。

$$\left.\begin{aligned}\phi_4 &= C \quad \text{for} \quad |x| < a \quad ,\\ \phi_4 &= \frac{x^2}{2h} + Dx + E \qquad \text{for} \quad a < x < b\\ &= A^+ e^{-iKx} \qquad \text{for} \quad x > b\end{aligned}\right\} \quad h\phi_{4xx} = 1 \equiv z$$

$$\left.\begin{aligned}C &= \frac{a^2}{2h} + aD + E\\ 0 &= \frac{a}{h} + D\end{aligned}\right\} \quad C = \frac{-a^2}{2h} + E \quad ,$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{b^2}{2h} + bD + E &= A^+ e^{-iKb}\\ \frac{b^2}{h} + D &= -iKA^+ e^{-iKb}\end{aligned}\right\} \quad \frac{b}{h}\left(1+\frac{iKb}{2}\right)+D(1+iKb)+iKE=0$$

$$iKE = +\frac{a}{h}(1+iKb) - \frac{b}{h}\left(1+\frac{iKb}{2}\right)$$

$$E = \frac{a-b}{iKh} + \frac{ab-\frac{b^2}{2}}{h}$$

$$C = -\frac{(a-b)^2}{2h} + \frac{a-b}{ihK} = \frac{i(b-a)}{Kb}\left[1+\frac{iK(b-a)}{2}\right]$$

$$A_4^+ = \frac{b-a}{-iKh} \quad e^{iKb} = A_4^-$$

$$\begin{aligned}\int_a^b \phi_4\,dx &= \frac{1}{6h}(b^3-a^3) + \frac{D}{2}(b^2-a^2) + E(b-a)\\ &= (b-a)\left[+\frac{b^2+a^2+ab}{6h} - \frac{(b+a)}{2}\times\frac{a}{h} + \frac{ba-\frac{b^2}{2}}{h} + \frac{a-b}{iKh}\right]\\ &= \frac{(b-a)}{h}\left[-\frac{a^2}{3} + \frac{2}{3}ab - \frac{b^2}{3} + i\,\frac{b-a}{K}\right]\\ &= \frac{(b-a)^2}{h}\left[\frac{i}{K} - \frac{(b-a)}{3}\right]\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\phi_3 &= Cx \qquad \text{for} \quad |x| < a\\ \phi_3 &= \frac{x^2}{2h} + Dx + E \qquad \text{for} \quad b > x > a\\ &= A_3^+ e^{-iKx} \quad , \qquad \text{for} \quad b < x\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}Ca &= \frac{a^2}{2h} + aD + E\\ C &= \frac{a}{h} + D\end{aligned}\right\} \quad E = \frac{a^2}{2h}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{b^2}{2h}+Db+\frac{a^2}{2h}=A_5^+ e^{-iKb}\\&\frac{b}{h}+D=-iKA\,e^{-iKb}\end{aligned}\right\}\quad \frac{b}{h}\left(1+\frac{iKb}{2}\right)+D\left(1+iKb\right)+\frac{iK}{2h}a^2=0$$

$$D=\frac{-1}{1+iKb}\left[\frac{b}{h}+\frac{iK}{2h}\left(a^2+b^2\right)\right]$$

$$C=\frac{a}{h}+D=\frac{a\left(1+iKb\right)-b-\frac{iK}{2}\left(a^2+b^2\right)}{h\left(1+iKb\right)}$$

$$=\frac{\left(a-b\right)}{h\left(1+iKb\right)}\left[1-\frac{iK}{2}\left(a-b\right)\right]$$

$$A_5^+=\frac{e^{iKb}}{-iKh\left(1+iKb\right)}\left[b\left(1+iKb\right)-b-\frac{iK}{2}\left(a^2+b^2\right)\right]$$

$$=\frac{+\left(b^2-a^2\right)}{2h\left(1+iKb\right)}e^{iKb}$$

主部の波強制力をなくすには端部振巾は$K(b-a)$に逆比例しなければならないので$(b-a)$が大きいか又はKが大きくないとうまくない。

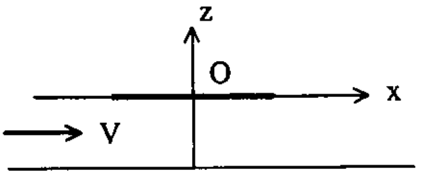
5. 前進速度のある場合

物体に固定した座標系に対して速度ポテンシャルは

$$\varphi(x)\,e^{i\omega_e t}$$

のように書けるとしよう。

ω_e；出会円周波数



$$gh\varphi_{xx}(x)\,e^{i\omega_e t}+\left(\frac{\partial}{\partial t}+V\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\varphi(x)\,e^{i\omega_e t}=0$$

$$\varphi_{xx}(x)\,e^{i\omega_e t}+\frac{1}{h}\left(\frac{\partial}{\partial t}+V\frac{\partial}{\partial x}\right)\zeta(x)\,e^{i\omega_e t}=0$$

つまり

$$g h \varphi_{xx}(x) - \left(i \omega_e + V \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \varphi(x) = 0$$

$$\varphi_{xx}(x) + \frac{1}{h} \left(i \omega_e + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \zeta(x) = 0$$

$$\zeta(x) = -\frac{1}{g} \left(i \omega_e + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(x)$$

圧力は　$\frac{1}{\rho} p(x) = -\left(i \omega_e + V \frac{\partial}{\partial x} \right) \varphi(x)$,

一般解を　$\varphi = e^{+iKx}$ とおくと（$K^2 = \omega^2 / g h = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2$）

$$K^2 g h = (\omega_e + KV)^2 = \omega^2$$

$$\omega_e = \omega \left(\frac{V}{c} \pm 1 \right) , \qquad c = \sqrt{g h}$$

$$= K (V \pm c)$$

今

$$K_1 = \frac{\omega_e}{V + c} \qquad \begin{cases} K_2 = \dfrac{\omega_e}{V - c} & \text{for } V > c \\ K_2 = \dfrac{\omega_e}{c - V} & \text{for } V < c \end{cases}$$

とおくと

$V > c$ の時は

$$\varphi = A e^{-i K_1 x} + B e^{-i K_2 x}$$

で第1項は（$V + c$）の速度で右方向に進み，第2項は（$V - c$）で右方向に進む波であるが静止座標系から見ると第2項は左方向に進んでいるものである。

$V < c$ の時は

$$\varphi = A e^{-i K_1 x} + B e^{i K_2 x}$$

この時第2項の波速は c（$> V$）なので左方に進む事ができる。

$$\omega_e - K_1 V = \omega_1$$

$$\left. \begin{array}{ll} \omega_e - K_2 V = \omega_2 & \text{for } V > c \\ \omega_e - K_2 V = \omega_2 & \text{for } V < c \end{array} \right\}$$

$$\zeta = -\frac{i}{g} \left(\begin{array}{c} \omega_1 \\ \omega_2 \end{array} \right) \varphi(x)$$

単位振幅の入射波ポテンシャル

$$\varphi = \underset{\text{（向波）}}{\frac{i g}{\omega_1} e^{-i K_1 x}} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{i g}{\omega_2} e^{-i K_2 x} & \text{for } V > c \\ \dfrac{i g}{\omega_2} \underset{\text{（追波）}}{e^{i K_2 x}} & \text{for } V < c \end{array} \right\}$$

◎ $V > c$の場合

i ）上下動

$$\zeta = X_2 \qquad \text{for} \quad |x| < b$$

$$\varphi_{xx} + \frac{i\omega_e}{h} X_2 = 0 \qquad \text{for} \quad |x| < b$$

$$\varphi = -\frac{i\omega_e}{h} X_2 \left(\frac{x^2}{2} + cx + D\right) \qquad \text{for} \quad |x| < b$$

$$\varphi = 0 \qquad \text{for} \quad x < -b$$

$$\varphi = A e^{-iK_1 x} + B e^{-iK_2 x} \qquad \text{for} \quad x > b$$

$$\varphi = \frac{\omega_e X_2}{hi} \quad \frac{(x+b)^2}{2} \qquad \text{for} \quad |x| < b$$

$$\frac{\omega_e X_2}{hi} 2b^2 = A e^{-iK_1 b} + B e^{-iK_2 b}$$

$$\frac{\omega_e X_2}{hi} 2b = -i\left(K_1 A e^{-iK_1 b} + K_2 B e^{-iK_2 b}\right)$$

$$\frac{\omega_e X_2}{hi} 2b(iK_2 b + 1) = i(K_2 - K_1) A e^{-iK_1 b}$$

$$\frac{\omega_e X_2}{hi} 2b(iK_1 b + 1) = i(K_1 - K_2) A e^{-iK_2 b}$$

$$\frac{p}{\rho} = -(i\omega_e)\frac{\omega_e X_2}{hi} \quad \frac{(x+b)^2}{2} - V\frac{\omega_e X_2}{hi}(x+b)$$

$$\int_{-b}^{b} \frac{p}{\rho} dx = -\frac{\omega_e^2 X_2}{2h} \frac{8b^3}{3} + \frac{iV\omega_e X_2}{2h} b^2 = \frac{2iV\omega_e X_2}{h} b^2 \left(1 + 2i\frac{\omega_e b}{3V}\right)$$

$$\int_{-b}^{b} (x+b)^2 x\, dx = \frac{4}{3} h^4$$

$$\int_{-b}^{b} (x+b) x\, dx = \frac{2h^3}{3}$$

$$\frac{1}{\rho} \int p x\, dx = i\frac{2}{3} \frac{\omega_e X_2}{h} b^3 V\left(1 + i\frac{h\omega_e}{V}\right)$$

ii）横ゆれ

$$\zeta = X_3 x$$

$$\varphi_{xx} = -\frac{X_3}{b}\ (i\omega_e x + V)$$

$$\varphi = -\frac{iX_3}{h}\omega_e\ \frac{x^3}{6} - \frac{X_3 V}{h}\ \frac{x^2}{2} + Cx + D$$

$$+\frac{iX_3}{h}\omega_e\frac{b^3}{3} - \frac{X_3 V}{2h}b^2 - bC + D = 0$$

$$-\frac{iX_3}{h}\omega_e\cdot\frac{b^3}{2} + \frac{X_3 V}{h}b + C = 0$$

$$-\frac{iX_3}{h}\omega_e\ b^3 + \frac{X_3 V}{2h}b^2 + D = 0$$

$$\varphi = -\frac{iX_3}{h}\omega_e\left(\frac{x^3}{3} - \frac{b^3}{6} - \frac{b^2 x}{2}\right) - \frac{X_3 V}{2h}(x+b)^2$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi\Big|_{x=b} &= \frac{i\omega_e}{3h}X_3 b^3 - \frac{2Vb^2}{h}X_3 = Ae^{-iK_1 b} + Be^{-iK_2 b}\\ \varphi_x\Big|_{x=b} &= -\frac{i\omega_e}{2h}X_3 b^2 - \frac{2V}{h}bX_3 = -iK_1 Ae^{-iK_1 b} - iK_2 Be^{-iK_2 b}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{i\omega_e}{h}X_3 b^2\left(\frac{iK_2 b}{3} - \frac{1}{2}\right) - \frac{2Vb}{h}X_3(iK_2 b + 1) &= i(K_2 - K_1)Ae^{-iK_1 b}\\ \frac{i\omega_e}{h}X_3 b^2\left(\frac{iK_1 b}{3} - \frac{1}{2}\right) - \frac{2Vb}{h}X_3(iK_1 b + 1) &= i(K_1 - K_2)Be^{-iK_2 b}\end{aligned}\right\}$$

$$\frac{p}{\rho X_3} = -\frac{\omega_e^2}{h}\left(\frac{x^2}{3} - \frac{b^2 x}{2} - \frac{b^2}{6}\right) + \frac{iV\omega_e}{2h}(x+b)^2$$

$$+\frac{iV\omega_e}{h}\left(x^2 - \frac{b^2}{2}\right) + \frac{V^2}{h}(x+b)$$

$$\int\frac{p}{\rho X_3}dx = +\frac{\omega_e^2}{3h}b^4 + \frac{i\omega_e}{h}V\ b^3 + \frac{2V^2}{h}b^2$$

$$\int\frac{pxdx}{\rho X_3} = -\frac{\omega_e^2}{5h}b^5 + \frac{iV\omega_e}{h}b^4\cdot\frac{2}{3} + \frac{V^2}{3h}b^3$$

iii）散乱

向波　$\varphi_0 = \dfrac{ig}{\omega_1} e^{-iK_1 x}$

$$\left.\begin{array}{lll} \varphi_d = 0 & \text{for} & x < -b \\ \varphi_d = -\varphi_0 + Cx + D & \text{for} & |x| < b \\ \varphi_d = A e^{-iK_1 x} + B e^{-iK_2 x} & \text{for} & x > b \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_0(-b) = -bC + D = \dfrac{ig}{\omega_1} e^{iK_1 b} \\ \varphi_{0x}(-b) = C = \dfrac{gK_1}{\omega_1} e^{iK_1 b} \end{array}\right\} \quad D = \left(\frac{ig}{\omega_1} + \frac{gK_1 b}{\omega_1}\right) e^{iK_1 b}$$

$$\left.\begin{array}{l} bC + D - \dfrac{ig}{\omega_1} e^{-iK_1 b} = A e^{-iK_1 b} + B e^{-iK_2 b} \\ C - \dfrac{gK_1}{\omega_1} e^{-iK_1 b} = -iK_1 A e^{-iK_1 b} - iK_2 B e^{-iK_2 b} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} C(1 + iK_2 b) + iK_2 D + \dfrac{g}{\omega_1}(K_2 - K_1) e^{-iK_1 b} = i(K_2 - K_1) A e^{-iK_1 b} \\ C(1 + iK_1 b) + iK_1 D = i(K_1 - K_2) B e^{-iK_2 b} \end{array}\right\}$$

$$\frac{p}{\rho} = -\left(i\omega_e + V\frac{\partial}{\partial x}\right)(\varphi_0 + \varphi_d) = -i\omega_e(Cx + D) - VC$$

$$\int \frac{p}{\rho}\, dx = -2i\omega_e bD - 2VCb$$

$$= \frac{-2i\omega_e bg}{\omega_1}(1 + bK_1) e^{iK_1 b} - \frac{2gbV}{\omega_1} K_1 e^{iK_1 b}$$

$$= \frac{2gb}{\omega_1} e^{iK_1 b} \left[\frac{\omega_1}{-VK_1 + \omega_e} - iK_1 b\omega_e\right]$$

$$\int \frac{p}{\rho}\, x\, dx = -i\omega_e C \cdot \frac{2}{3} b^3 = -\frac{2i}{3} g \frac{\omega_e b^3 K_1}{\omega_1} e^{iK_1 b}$$

◎　$V<c$ の場合

i）上下動（単位振巾）

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi &= B^{-} e^{iK_2 x} && \text{for} \quad x<-b \\
\varphi &= \frac{i\,\omega_e}{h}\left(\frac{x^2}{2}+Cx+D\right) && \text{for} \quad |x|<b \\
\varphi &= A^{+} e^{-iK_1 x} && \text{for} \quad |x|>b
\end{aligned}
\right\}
$$

$$B^{-} e^{-iK_2 b} = \frac{\omega_e}{hi}\left(\frac{b^2}{2} - bC + D\right)$$

$$iK_2 B^{-} e^{-iK_2 b} = \frac{\omega_e}{hi}(-b+C)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\omega_e}{hi}\left(\frac{b^2}{2} + bC + D\right) &= A^{+} e^{-iK_1 b} \\
\frac{\omega_e}{hi}(b+C) &= -iK_1 e^{-iK_1 b}
\end{aligned}
\right\}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
(1+iK_2 b)C - iK_2 D &= b + \frac{iK_2}{2} b^2 \\
(1+iK_1 b)C + iK_1 D &= -b - \frac{iK_1}{2} b^2
\end{aligned}
\right\}
$$

$$C = \frac{b(K_1-K_2)}{K_1+K_2+2iK_1K_2 b}$$

$$D = \frac{-b(2+iK_2 b+iK_1 b) - \frac{i}{2} b^2 [K_1(1+iK_2 b)+K_2(1+iK_1 b)]}{i.[K_1(1+iK_2 b)+K_2(1+K_1 b)]}$$

$$B^{-} = \frac{+\omega_2}{ih} e^{iK_2 b} \frac{[(-b^2(K_1-K_2) + ib(2+iK_1 b + iK_2 b))]}{K_1+K_2+2iK_1K_2 b}$$

$$= \frac{2\omega_e}{h} e^{iK_2 b} \times \frac{b(1+iK_1 b)}{K_1+K_2+2iK_1K_2 b}$$

$$A^{+} = \frac{2b\omega_e}{h} e^{iK_1 b} \times \frac{(1+iK_2 b)}{K_1+K_2+2iK_1K_2 b}$$

$$\int \frac{p}{\rho}\, dx = -i\omega_e \int \varphi\, dx - V\left[\varphi\right]_{-b}^{b}$$

$$\int \frac{p}{\rho}\, x\, dx = -i\omega_e \int \varphi\, x\, dx - V\left[x\varphi\Big|_{-b}^{b} - \int \varphi\, dx\right]$$

$$\int \varphi\, dx - \frac{\omega_e}{ih}\left(\frac{b^3}{3} + 2bD\right), \quad \left[\varphi\right]_{-b}^{b} = \frac{\omega_e}{ih}(2b)C$$

$$\int \varphi\, x\, dx = \frac{\omega_e}{ih} C \frac{2}{3} b^3, \quad \int x\, \varphi_x\, dx = \frac{\omega_e}{ih} \cdot \frac{2}{3} b^3$$

$$\int \frac{p}{\rho}\, dx = -\frac{\omega_e^2}{h}\left(\frac{b^3}{3} + 2Db\right) + i\frac{2b}{h}\omega_e VC$$

$$\int \frac{p}{\rho}\, x\, dx = -\frac{2\omega_e^2}{3h} C b^3 + i\frac{2}{3}\frac{V}{h} b^3 \omega_e$$

ii）縦ゆれ　（$\zeta = x$）

$$\left.\begin{aligned}
\varphi &= B^{-} e^{iK_2 x} && \text{for} \quad x < -b \\
\varphi &= -\frac{1}{h}\left(i\omega_e \frac{x^3}{6} + \frac{V}{2} x^2 + Cx + D\right), && \\
\varphi &= A^{+} e^{-iK_1 x} && \text{for} \quad x > b
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
B^{-} e^{-iK_2 b} &= -\frac{1}{h}\left(-\frac{i\omega_e}{6} b^3 + \frac{V}{2} b^2 - bC + D\right), \\
iK_2 B^{-} e^{-iK_2 b} &= -\frac{1}{h}\left(\frac{i\omega_e}{2} b^2 - Vb + C\right), \\
A^{+} e^{-iK_1 b} &= -\frac{1}{h}\left(\frac{i\omega_e}{6} b^3 + \frac{V}{2} b^2 + bC + D\right), \\
-iK_1 A^{+} e^{-iK_1 b} &= -\frac{1}{h}\left(\frac{i\omega_e}{2} b^2 + Vb + C\right),
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
C(1 + iK_2 b) - iK_2 D &= -\frac{i\omega_e b^2}{2}\left(\frac{iK_2 b}{3} + 1\right) + Vb\left(1 + \frac{iK_2 b}{2}\right), \\
C(1 + iK_1 b) + iK_1 D &= -\frac{i\omega_e}{2} b^2\left(1 + \frac{iK_1 b}{3}\right) - Vb\left(1 + \frac{iK_1 b}{2}\right),
\end{aligned}\right\}$$

$$C = \frac{\frac{\omega_e}{2i} b^2\left(K_1 + K_2 + \frac{2}{3} iK_1 K_2 b\right) + Vb(K_1 - K_2)}{K_1 + K_2 + 2iK_1 K_2 b}$$

$$D=\frac{\frac{\omega_e}{2i}b^2\left[\left(1+\frac{2}{3}K_1b\right)(1+iK_2b)-\left(1+\frac{1}{3}K_2b\right)(1+iK_1b)\right]-Vb\left[\begin{array}{l}\left(1+\frac{iK_1b}{2}\right)(1+iK_2b)\\+\left(1+\frac{iK_2b}{2}\right)(1+iK_1b)\end{array}\right]}{i\left[K_1+K_2+2iK_1K_2b\right]}$$

$$=\frac{\frac{\omega_e}{3}b^3(K_2-K_1)-Vb\left[2+\frac{3}{2}iK_1b+\frac{3}{2}iK_2b-K_1K_2b^2\right]}{i\left[K_1+K_2+2iK_1K_2b\right]}$$

$$B^-=\frac{ie^{iK_2b}}{K_2}\left[\frac{\frac{\omega_e}{2i}b^2\left(-\frac{4}{3}iK_1K_2b\right)+Vb\left(K_1-K_2\right)}{K_1+K_2+2iK_1K_2b}-Vb\right]$$

$$=\frac{ie^{iK_2b}}{K_2h}\;\frac{-\frac{2}{3}\omega_e b^3K_1K_2-2VbK_2\left(1+iK_1b\right)}{K_1+K_2+2iK_1K_2b}$$

$$A^+=\frac{e^{iK_1b}}{ih}\;\frac{\left[-\frac{2}{3}\omega_e b^3K_2+2Vb\left(1+iK_2b\right)\right]}{K_1K_2+2iK_1K_2b}$$

$$\int\varphi\,dx=-\frac{1}{h}\left[\frac{V}{3}b^3+2Db\right]$$

$$\int\varphi x\,dx=-\frac{1}{h}\left[\frac{i\omega_e}{15}b^5+\frac{2}{3}Cb^3\right]$$

$$\int\varphi_x\,dx=-\frac{1}{h}\left[\frac{i\omega_e}{3}b^3+2bC\right]$$

$$\int x\varphi_x\,dx=-\frac{1}{h}\left[\frac{2}{3}bV\right]$$

$$\int\frac{p}{\rho}\,dx=-i\omega_e\int\varphi\,dx-V\int\varphi_x\,dx$$

$$=\frac{i\omega_e}{h}\left[\frac{V}{3}b^2+2D\right]b+\frac{2Vb}{h}\left[\frac{i\omega_e}{6}b^2+C\right]$$

$$=\frac{2i\omega_eV}{h}b\left[\frac{b^2}{3}+\frac{D}{V}\right]+\frac{2Vb}{h}C$$

$$\int\frac{p}{\rho}x\,dx=+\frac{i\omega_e}{h}\left[\frac{i\omega_e}{15}b^5+\frac{2}{3}Cb^3\right]+\frac{V^2}{h}\times\frac{2b}{3}$$

iii）散乱

向波 $\varphi_0 = \dfrac{i g}{\omega_1} e^{-iK_1 x}$

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_d &= B^- e^{iK_2 x} \qquad \text{for} \quad x < -b \\
\varphi_d &= -\varphi_0 + Cx + D \\
\varphi_d &= A^+ e^{-iK_1 x}
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
B^- e^{-iK_2 b} &= -\frac{i g}{\omega_1} e^{iK_1 b} - Cb + D \\
iK_2 B^- e^{-iK_2 b} &= -\frac{gK_1}{\omega_1} e^{iK_1 b} + C
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
A e^{-iK_1 b} &= -\frac{i g}{\omega_1} e^{-iK_1 b} + bC + D \\
-iK_1 A e^{-iK_1 b} &= -\frac{gK_1}{\omega_1} e^{-iK_1 b} + C
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
C(1+iK_2 b) - iK_2 D &= \frac{g}{\omega_1}(K_1-K_2) e^{iK_1 b} \\
C(1+iK_1 b) + iK_1 D &= 0
\end{aligned}\right\}$$

$$C = \frac{\dfrac{g}{\omega_1}(K_1-K_2) e^{iK_1 b}}{K_1+K_2+2iK_1K_2 b}$$

$$D = \frac{(1+iK_1 b)}{-iK_1} C$$

$$\int (\varphi_0+\varphi_d)\,dx = 2bD \quad , \qquad \int (\varphi_0+\varphi_d)\,x\,dx = \frac{2}{3} b^3 C$$

$$\int (\varphi_0+\varphi_d)_x\,dx = 2bC \quad , \qquad \int (\varphi_0+\varphi_d)_x\,x\,dx = 0$$

$$\int \frac{(\varphi_0+\varphi_d)}{\rho}\,dx = -2i\,\omega_e\,b D - 2bCV$$

$$\int \frac{(\varphi_0+\varphi_d)x}{\rho}\,dx = -\frac{2i}{3}\,\omega_e\,b^3 C$$