

丸山清志著「ブシネスク近似の下での流体のエネルギー論」に対するコメント

本論文は、ブシネスク近似のもとで、①密度が温度によって一意的に決まるという関係((2)式)を仮定した流体は質量の保存則を満たさないこと、②(2)式を仮定せず質量の保存層と整合するように密度一定としてエネルギー収支を調べると、浮力のなす仕事は、従来考えられてきたように運動エネルギーと位置エネルギー間のエネルギー変換に対応するのではなく、運動エネルギーと内部エネルギー間のエネルギー変換に対応する、と主張するものである。

ブシネスク近似は、流体の平均的な密度 ρ_0 に比べて、密度 ρ の ρ_0 からのずれ ρ' が小さく、流速が音速より十分小さいときに適用できる近似で、慣性密度は ρ_0 で近似するが、浮力に関わる重力密度については正規の密度 $\rho = \rho_0 + \rho'$ を使うという近似である。従って、慣性密度 ρ に関しては ρ' のオーダーの誤差を容認した近似であり、(4)式で指摘されるような質量保存則を満たさないことは、もともとブシネスク近似には織り込み済みであって、この点を批判的に扱うことは意味がないと思われる。

次に、著者は流体の密度は一樣としているが、(鉛直方向に)密度一樣な非圧縮流体中で浮力はどのように生ずるのであろうか？確かに、(8)式のように粘性散逸や外部からの熱輸送があれば、浮力が生ずる可能性はある。この場合、擾乱場には温度擾乱があるが、それは粘性散逸や熱拡散によって生じたものであり、基本場の密度は鉛直方向に一樣なので、基本場の位置エネルギーは変化しない((23)式)というのは当然の結果であろう。しかし、密度成層流体の運動を取り扱うというブシネスク近似の主旨からすると、分子粘性や分子拡散の効果は本質的ではない。本来ブシネスク流体のエネルギーに関する議論は、非粘性・拡散なしで、境界は free-slip かつ断熱でも成立するものであると思う。

さて、ここからは(21)式に注目してみよう。(21)式に現れる T' は一定の基準温度 T_0 からのずれとして定義されている((9)式)。しかし、ブシネスク近似で我々が取り扱いたいのは、密度あるいは温度が鉛直 z 方向に $\bar{\rho}(z)$ あるいは $\bar{T}(z)$ のように成層した流体の運動である。すなわち(21)式に現れる T' は一定の基準温度 T_0 からのずれではなく、鉛直方向に変化する $\bar{T}(z)$ からのずれとして定義されるべきであろう。密度が鉛直 z 方向に $\bar{\rho}(z)$ のように成層した流体の運動を考えると、著者の主張する「密度が ρ_0 で一樣」とする取り扱いの下でどのように定式化されるのか、本論文は答えていないように見える。(22)式の右辺最後に現れる項も、通常使われる浮力による運動エネルギーの生成項とは意味が異なっている。

最後に、「5.議論」のセクションで述べられている「流体の塩分変化に伴って発生する浮力のなす仕事は、運動エネルギーと位置エネルギーの変換に対応する」という記述があるが、著者による文献5)には、海洋のように密度が温度と塩分による流体の場合、温度に

よる浮力のする仕事は運動エネルギーと内部エネルギー間の変換に対応し、塩分による浮力のする仕事は運動エネルギーと位置エネルギー間のエネルギー変換に対応するという結果が示されている。海洋には温度と塩分の拡散係数の違いによって起きる二重拡散対流という現象があるが、温度を使った実験は境界からの熱の遮断が難しいため、室内実験では温度（拡散の早い物質）の代わりに塩分、塩分（拡散の遅い物質）の代わりに砂糖分で実験を行なうことが少なくない。実験をしてみると、どちらの成分の組み合わせでも良く似た二重拡散対流が起きるが、著者の主張のように（温度、塩分）の組み合わせの時は、温度による浮力による仕事は運動エネルギーと内部エネルギー間の変換、塩分による浮力による仕事は運動エネルギーと位置エネルギー間の変換になる一方、（塩分、砂糖分）の組み合わせの時は、どちらも運動エネルギーと位置エネルギー間の変換となるというのは物理的には整合的でないように思われる。いずれにしても、鉛直方向に密度成層した場合の運動やエネルギー論が、本論文記載のものでは適切に扱われていないのではないかという疑念が拭えない。

以上述べたように、最初に述べた本論文の2つの主張①②のいずれについても、問題があると思われることから、「ながれ」論文としての採用には適さないと考える。

なお、著者は密度の温度依存性の関係（(2)式）にこだわりを持って議論しているが、ブシネスク近似のもと、非粘性・非拡散の密度成層流体の運動は、基本場の密度の鉛直分布を $\bar{\rho}(z)$ 、対応する静水圧を $\bar{p}(z)$ 、基本場からのずれをそれぞれ ρ' 、 p' とすると、密度が何の成分によって変化するかを問わず

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' - g \frac{\rho'}{\rho_0} \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\bar{\rho} + \rho') &= 0\end{aligned}$$

で記述されることにも留意いただければと思う（ここで ρ_0 は流体全体の平均密度である）。これらの式で、微小振幅の擾乱を仮定して擾乱に関する2次の項を無視すると、

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' - g \frac{\rho'}{\rho_0} \\ \frac{\partial \rho'}{\partial t} + u_3 \frac{d\bar{\rho}}{dz} &= 0\end{aligned}$$

となり、内部重力波の挙動を記述する支配方程式となる。 $N^2 \equiv -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\bar{\rho}}{dz}$ が一定の場合には、特に密度の温度依存性を持ち出さずとも、よく知られた内部重力波の分散関係が導ける。