〔原著論文〕

ブシネスク近似の多成分系への拡張

防衛大学校　地球海洋学科　丸　山　清　志*

Extension of the Boussinesq Approximation to Multi-component Systems

*Kiyoshi Maruyama, Department of Earth and Ocean Sciences, National Defense Academy

*E-mail: maruyama@nda.ac.jp

(Refused to receive 8 January 2025)

担当エディタ　ながれ 三郎

The Boussinesq approximation is originally an approximation for a single-component fluid with a nonuniform temperature distribution in a uniform gravitational field. It can be extended to a multi-component fluid if buoyancy forces caused by the nonuniformity of the composition of the fluid are included in the equation of motion. However, it turns out that, since the equation of continuity is inviolable, the condition $\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0$ on the fluid velocity $\boldsymbol{u}$ cannot be imposed in this extended approximation in contrast to the original Boussinesq approximation. The condition to be imposed instead is presented.

(**KEY WORDS**): Boussinesq approximation, equation of continuity, multi-component system

1　はじめに

ブシネスク近似は本来，一様重力場中で非一様な温度分布を持つ単一成分流体に関する近似である [1]．この近似の下では，質量の保存則を表す連続の式は，流体の速度 $\boldsymbol{u}$ に関する以下の非発散条件で置き換えられる:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0. \tag{1}$$

一方，大気や海洋といった多成分系を研究対象とする地球流体力学では，成分濃度の変化に由来する浮力項を運動方程式中に含めることで，この近似が拡張されている [2]．この拡張された近似の下でも，非発散条件 (1) は使用されている．

しかし実は，多成分系に拡張されたブシネスク近似の下で非発散条件 (1) を課すことは，物理的に見て妥当でない [3]．以下では，その理由を順を追って説明すると共に，多成分系において非発散条件 (1) に代わって課すべき条件を明らかにしたい．

2　質量流束密度，運動量，及び流体の速度

初めに質量の保存則を表す連続の式について考えよう. 通常そうであるように流体中に質量源が存在しないとき，流体の密度を ρ として，次の連続の式が成立する:

$$\partial\rho/\partial t+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u})=0. \tag{2}$$

連続の式にはここに現れている以外の付加的な項は一切含まれ得ない．このことは Landau & Lifshitz の教科書 [1] 中，§49 の最終パラグラフにおいて明確に述べられているところである．

ところが地球流体力学では，連続の式 (2) はブシネスク近似の下では成立することを要しないものと誤解されている [4]．このことは，少なくとも地球流体力学の分野では，上記の流体力学における基本命題の物理的意味が正しく理解されていないことを意味している．従って，ほぼ自明と思われる上記命題の証明を示し，この命題の物理的意味を再度吟味しておくことは，以後の議論を進めてゆく上で有意義であると思われる．なお以下で与える証明は，Landau & Lifshitz の教科書中，§49 の脚注でごく簡単に述べられている方針に従うものである．

密度 ρ の流体を考え，その質量流束密度を $\boldsymbol{j}$ で表す. 流体中に質量源が存在しないとき，次式が成立する [1]:

$$\partial\rho/\partial t+\nabla\cdot\boldsymbol{j}=0. \tag{3}$$

ここで次のように定義される速度 $\boldsymbol{q}$ を導入しよう:

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{j}/\rho. \tag{4}$$

さらに流体の単位質量あたりの運動量を $\boldsymbol{p}$ で表すことにする．我々の最初の目標は (3) に基づいて $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}$ が成立することを示すことである．

そのためにまず，任意の瞬間 $t = t_0$ において流体中に任意の体積 Ω_0 をとる．その上で，速度 $\boldsymbol{q}$ で流体中を運動する多数の点によって構成される体積 Ω_t を考えよう．我々は Ω_t が時刻 $t = t_0$ において Ω_0 と一致するものと仮定する．

さて体積 Ω_t に含まれる質量 M は次式で与えられる:

$$M = \int_{\Omega_t} \rho dV. \tag{5}$$

この質量 M の変化率は以下のように計算できる [5]:

$$\begin{aligned} \frac{dM}{dt} &= \int_{\Omega_t} (\partial\rho/\partial t + \boldsymbol{q}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\boldsymbol{q})\, dV \\ &= \int_{\Omega_t} (\partial\rho/\partial t + \nabla\cdot\boldsymbol{j})\, dV. \end{aligned} \tag{6}$$

ここで (3) を用いれば次式が得られる:

$$dM/dt = 0. \tag{7}$$

この式は (4) で定義された速度 $\boldsymbol{q}$ で運動する体積 Ω_t が物質体積であることを示している．

次に以下の積分で定義される量を考えよう:

$$\int_{\Omega_t} \rho\boldsymbol{r} dV. \tag{8}$$

ここで $\boldsymbol{r}$ は流体が存在する空間の位置ベクトルである．この量の変化率は，(3) を考慮すれば，以下のように計算できる [5]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho\boldsymbol{r} dV &= \int_{\Omega_t} \rho\left\{\partial\boldsymbol{r}/\partial t + (\boldsymbol{q}\cdot\nabla)\boldsymbol{r}\right\} dV \\ &= \int_{\Omega_t} \rho\boldsymbol{q} dV. \end{aligned} \tag{9}$$

一方で $\boldsymbol{r}_{\mathrm{cm}}$ を Ω_t の重心の位置ベクトルとすれば

$$\int_{\Omega_t} \rho\boldsymbol{r} dV = M\boldsymbol{r}_{\mathrm{cm}}. \tag{10}$$

これから (7) を用いて次式が得られる:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho\boldsymbol{r} dV = M\frac{d\boldsymbol{r}_{\mathrm{cm}}}{dt}. \tag{11}$$

ところが (11) の右辺は物質体積 Ω_t の運動量である．従って単位質量あたりの運動量 $\boldsymbol{p}$ を使って (11) は

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega_t} \rho\boldsymbol{r} dV = \int_{\Omega_t} \rho\boldsymbol{p} dV \tag{12}$$

と書き直せる．この式と (9) を見比べると

$$\int_{\Omega_t} \rho\boldsymbol{q} dV = \int_{\Omega_t} \rho\boldsymbol{p} dV \tag{13}$$

であることが分かる．ところで時刻 $t = t_0$ において Ω_t は Ω_0 と一致するので (13) により，時刻 $t = t_0$ において

$$\int_{\Omega_0} \rho(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) dV = 0 \tag{14}$$

が成立することになる．しかるに Ω_0 と t_0 は任意であり，$\rho > 0$ であるので

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}. \tag{15}$$

かくして我々の所期の目標は達せられた．この式を (4) と組み合わせれば，流体の質量流束密度はその流体の単位体積あたりの運動量である [1] ことが理解される．

ところで流体力学において，流体の速度 $\boldsymbol{u}$ は単位質量あたりの運動量と定義される [1]．従って (15) より

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{u} \tag{16}$$

が得られる．結局 (3), (4), 及び (16) から，流体中に質量源が存在しないとき，流体の密度 ρ 及び流体の速度 $\boldsymbol{u}$ は連続の式 (2) を満足せねばならぬことが分かる．これは当然ブシネスク近似の下でも真である．

では今，ある流体について，流体中に質量源が存在しないにもかかわらず，連続の式が成立しないものと仮定してみよう:

$$\partial\rho/\partial t + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) \neq 0. \tag{17}$$

上記の結果に鑑みて，これは次のことを意味している．すなわち，ρ はその流体の密度ではないか，あるいは $\boldsymbol{u}$ はその流体の単位質量あたりの運動量ではない．

3 単一成分流体に関するブシネスク近似

ブシネスク近似を多成分流体に拡張するのに先立ち，本節では単一成分流体に関するこの近似の本質を明らかにしておきたい．なおこれ以降は，固定境界 Σ によって囲まれた領域 Ω を満たす流体の一定重力加速度 g を持つ重力場中での運動を考えることにする．この領域には直交座標系 (x_1, x_2, x_3) が設定され，特に x_3 軸は鉛直上向きに取られているものとする．

まずブシネスク近似の下での単一成分流体の密度について考えてみよう．従来，この近似下で運動方程式を導く際には，流体の密度は摂動温度の一次関数であると仮定されてきた [1]．ところが，非発散条件 (1) と共にこの仮定を採用すると，連続の式 (2) は一般には成立しなくなる [3]．流体の速度がその定義通りに単位質量あたりの運動量であるとすると，前節の結果に照らして以下の

結論が導かれる．すなわち，ブシネスク近似下での流体の密度は摂動温度の一次関数ではない．

実はブシネスク近似の下での単一成分流体の密度は，一定値 ρ_0 であると考えられる [3]:

$$\rho = \rho_0. \tag{18}$$

ただし同時に，流体の熱膨張係数 β はゼロではないものと仮定する必要がある:

$$\beta = v^{-1}(\partial v/\partial T)_p \neq 0. \tag{19}$$

ここに $v = 1/\rho$ は流体の比容であり，T 及び p はそれぞれ流体の温度と圧力を示している．

流体の密度が (18) で与えられるときには，非発散条件 (1) を課すことで連続の式 (2) が成立し，よって流体の速度が単位質量あたりの運動量であることが保証される．さらに，重力加速度がゼロとなる極限において流体が単なる非圧縮性流体に正確に帰着することになり，至って合理的である．

一方，(18) により流体の位置エネルギーは不変となる:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho g x_3 dV = \frac{d}{dt}\int_\Omega \rho_0 g x_3 dV = 0. \tag{20}$$

すなわちブシネスク近似の下では，位置エネルギーと他のエネルギー形態との間のエネルギー変換は生じない．

地球流体力学では従来，ブシネスク近似下で流体の温度変化に伴って運動方程式中に現れる浮力のなす仕事は，運動エネルギーと位置エネルギー間のエネルギー変換に対応するものと信じられてきた [6]．これが単なる誤解に過ぎないことが上述の結果から理解される．次節においても確認するが，実はこの流体の温度変化に起因する浮力のなす仕事は，運動エネルギーと内部エネルギー間のエネルギー変換に対応するのである [3]．この結論は決して驚くべきものではなく，物理的には至極当然であることを以下では説明したい．

まず注意すべきことは，ブシネスク近似の下で浮力と呼ばれるものは，アルキメデスの原理に言うところのいわゆる浮力ではなく，流体に鉛直下向きに働く重力と，静水圧に由来して鉛直上向きに働く圧力傾度力との不均衡により生じる力である，という事実である．これらの力のうち，静水圧に由来する圧力傾度力が，いわゆる浮力と呼ばれているものである．

さて，ある流体塊をとり，これを加熱（冷却）したとしよう．このとき流体塊は膨張（収縮）し，その結果この流体塊に働く静水圧由来の圧力傾度力は増加（減少）するであろう．圧力傾度力が流体塊の体積に比例するからである．一方で流体塊に働く重力は，それが流体塊の質量に比例するゆえに，不変である．結果としてこれら二力の間には不均衡が生じ，流体塊には鉛直方向に力が働くことになる．

以上の考察から，ブシネスク近似下で流体に働く浮力の実体は余剰な静水圧由来の圧力傾度力であると解される．ところが固定境界によって囲まれた領域内で圧力傾度力のなす仕事は，一般に運動エネルギーと内部エネルギー間のエネルギー変換に対応する [7]．かくしてブシネスク近似下で流体に働く浮力のなす仕事は，運動エネルギーと内部エネルギー間のエネルギー変換に対応することになるのである．

4 多成分流体に関する拡張されたブシネスク近似

前節までの議論を踏まえて，本節ではブシネスク近似を多成分流体に拡張することを試みる．ただし一般化は容易なので，以下で扱う多成分流体は，水と塩（えん）とから成る二成分系とみなした海水であると考える．物理的な状況は前節と同じものを想定し，以降は正の x_1, x_2, x_3 軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ で示すことにする．また，添字 $i, j, \ldots$ は数字 $1, 2, 3$ を表わし，総和の規約が用いられることを注意しておく．

まず，考える流体の塩分 c，すなわち流体の単位質量あたりの塩の質量は，流体中でごく僅かしか変化しないものと仮定する．これに応じて，ある一定の基準塩分を c_0，この塩分からの僅かな偏差を c' として，c を以下のように表現する:

$$c = c_0 + c'. \tag{21}$$

塩分 c の従う方程式は，物質微分を D/Dt で，塩の拡散流束密度を $\boldsymbol{i}$ で表すとき，次式で与えられる [1]:

$$\rho Dc/Dt = -\nabla\cdot\boldsymbol{i}. \tag{22}$$

なお，流体を構成する水と塩の流束密度は，$\boldsymbol{i}$ と流体の速度 $\boldsymbol{u}$ を用いて，それぞれ $\rho(1-c)\boldsymbol{u} - \boldsymbol{i}$ 及び $\rho c\boldsymbol{u} + \boldsymbol{i}$ で与えられることに注意すべきである．また流体の化学ポテンシャル [1] を μ で示し，流体の温度 T, 圧力 p, 及び塩分 c の関数とみなす:

$$\mu = \mu(T, p, c). \tag{23}$$

ただし T 及び p も，本来のブシネスク近似と同様 [1]，ごく僅かしか変化しないものと仮定する．従って T は

$$T = T_0 + T' \tag{24}$$

と書くことができる．ここに T_0 は適当な一定の基準温度で，T' は T_0 からの微小なずれを表す．同様に p は，p' を微小な摂動圧力として，以下のように表現される:

$$p = p_0 + p'. \tag{25}$$

ここに p_0 は次式で定義される静水圧である:

$$p_0 = -\rho_0 g x_3 + \text{constant}. \tag{26}$$

次に，この流体の密度について考えよう．塩分の微小偏差 c' が流体全体に亘って一定であるときには，当然前節と同様に流体の密度はある定数に等しいとすべきであろう．しかしながらこの定数は，c' の関数であっても差し支えない．そこで，c' が微小であることから，以下のようにおくことにする:

$$\rho = \rho_0 + \rho_0 \beta_c c'. \tag{27}$$

ただし塩分収縮係数 $\beta_c = \rho^{-1}(\partial\rho/\partial c)_{T,p}$ は定数とみなす．このとき，連続の式 (2) を

$$\rho^{-1} D\rho/Dt + \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{28}$$

と書き直せば分かるように，一般には $\nabla\cdot\boldsymbol{u} \neq 0$ となる．

連続の式 (2) と密度の式 (27) を用いると，この流体の位置エネルギーの方程式が以下のように導かれる:

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho g x_3 dV = \int_\Omega (\rho_0 g u_3 + \rho_0 \beta_c c' g u_3) dV. \tag{29}$$

ただし u_i で流体の速度 $\boldsymbol{u}$ の x_i 軸方向の成分を示すと共に，簡単のため，領域 Ω の固定境界 Σ 上で，外向き単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ として，$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n} = 0$ を仮定している．上式右辺の積分中に二つの項が存在することから，前節とは異なり，位置エネルギーと他のエネルギー形態との間にエネルギー変換の生じることが理解される．積分中の２項のうち，第１項は位置エネルギーと内部エネルギー間のエネルギー変換に対応している．以下ではまず，この事実を確認してみたい．

流体の内部エネルギーの方程式は，熱輸送の一般式 [1]

$$\rho T\frac{Ds}{Dt} = \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \nabla\cdot\boldsymbol{q} + \mu\nabla\cdot\boldsymbol{i} \tag{30}$$

から導くことができる．ただし s は流体の比エントロピー，τ_{ij} は粘性ストレステンソルの成分，$\boldsymbol{q}$ は熱流束密度を示している．なお上式の右辺第１項は，粘性散逸に伴う加熱項である．

さて今，s を温度 T, 圧力 p, 及び塩分 c の関数とみなすと Ds/Dt は次のように表現できる:

$$\begin{aligned}\frac{Ds}{Dt} &= \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_{p,c}\frac{DT}{Dt} \\ &\quad + \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_{T,c}\frac{Dp}{Dt} + \left(\frac{\partial s}{\partial c}\right)_{T,p}\frac{Dc}{Dt}.\end{aligned} \tag{31}$$

ここで，流体の定圧比熱を c_p として $(\partial s/\partial T)_{p,c} = c_p/T$ であり，$(\partial s/\partial p)_{T,c} = -(\partial v/\partial T)_{p,c} = -v\beta$ となること，及び $(\partial s/\partial c)_{T,p} = -(\partial\mu/\partial T)_{p,c}$ と書ける [1] ことに注意する．我々は T, p, 及び c がごく僅かしか変化しないものと仮定しているので，これらの係数は $T = T_0, p = p_0$, 及び $c = c_0$ において評価して良かろう．このとき (24) と (25) を用いれば

$$\begin{aligned}\frac{Ds}{Dt} &= \frac{c_{p0}}{T_0}\frac{DT'}{Dt} \\ &\quad - v_0\beta_0\left(\frac{Dp_0}{Dt} + \frac{Dp'}{Dt}\right) - \left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_{p,c}\frac{Dc}{Dt}\end{aligned} \tag{32}$$

を得る．ただし $v_0 = 1/\rho_0$ 且つ

$$c_{p0} = c_p(T_0, p_0, c_0), \quad \beta_0 = \beta(T_0, p_0, c_0) \tag{33}$$

であり，$(\partial\mu/\partial T)_{p,c}$ もまた $T = T_0, p = p_0$, 及び $c = c_0$ で評価されているものとする．なお c_{p0} 及び β_0 は一般に，p_0 を通じて x_3 の関数であっても差し支えない．

他方，s を比内部エネルギー e, 比容 v, 及び塩分 c の関数とみなせば，$(\partial s/\partial c)_{e,v} = -\mu/T$ であるので，上と同様にして

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{1}{T_0}\frac{De}{Dt} + \frac{p_0}{T_0}\frac{Dv}{Dt} - \frac{\mu_0}{T_0}\frac{Dc}{Dt} \tag{34}$$

が得られる．ここに $\mu_0 = \mu(T_0, p_0, c_0)$ である．

よって (32) と (34) を (24) と共に用いれば

$$\begin{aligned}\rho T\frac{Ds}{Dt} &= \rho T_0\frac{Ds}{Dt} + \rho T'\frac{Ds}{Dt} \\ &= \rho T_0\left\{\frac{1}{T_0}\frac{De}{Dt} + \frac{p_0}{T_0}\frac{Dv}{Dt} - \frac{\mu_0}{T_0}\frac{Dc}{Dt}\right\} \\ &\quad + \rho T'\left\{\frac{c_{p0}}{T_0}\frac{DT'}{Dt} - v_0\beta_0\left(\frac{Dp_0}{Dt} + \frac{Dp'}{Dt}\right)\right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_{p,c}\frac{Dc}{Dt}\right\}\end{aligned} \tag{35}$$

を得る．ここで (26) により $Dp_0/Dt = -\rho_0 g u_3$ であること，また (28) により $\rho Dv/Dt = -\rho^{-1}D\rho/Dt = \nabla\cdot\boldsymbol{u}$ であることを考慮すると，プライムのついた変数について一次までの近似で

$$\rho T\frac{Ds}{Dt} = \rho\frac{De}{Dt} + p_0\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{i} + \rho_0\beta_0 T' g u_3 \tag{36}$$

が得られる．ただし (22) を用いた上で，さらに (21) と (22) により $\nabla\cdot\boldsymbol{i}$ が一次の微小量となることを利用した．

この結果を熱輸送の一般式 (30) に代入すると

$$\rho\frac{De}{Dt} = -p_0\nabla\cdot\boldsymbol{u} + \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \nabla\cdot\boldsymbol{q} - \rho_0\beta_0 T' g u_3 \tag{37}$$

が出てくる．ただし二次の微少量となる $(\mu - \mu_0)\nabla\cdot\boldsymbol{i}$ は無視している．ここで，さらに連続の式 (2) と

$$\begin{aligned}-p_0\nabla\cdot\boldsymbol{u} &= -\nabla\cdot(p_0\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u}\cdot\nabla p_0 \\ &= -\nabla\cdot(p_0\boldsymbol{u}) - \rho_0 g u_3\end{aligned} \tag{38}$$

とに注意して，(37) を領域 Ω で積分すると，以下の内部エネルギーの方程式が求められる:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho e dV &= \int_\Omega \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dV - \int_\Sigma \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}dS \\ &\quad - \int_\Omega (\rho_0 g u_3 + \rho_0\beta_0 T' g u_3)dV.\end{aligned} \tag{39}$$

上式を位置エネルギーの方程式 (29) と比べれば，(29) の右辺積分中の第１項が，上式最後の積分中に符号を変えて現れることが見て取れる．かくしてこの項が位置エネルギーと内部エネルギー間のエネルギー変換に対応することが確認された．

さて (29) と (39) に存在するその他の項のうち，(39) の右辺第２項は境界 Σ を横切る熱輸送を表している．残りの項は，運動エネルギーと位置または内部エネルギー間のエネルギー変換に対応するはずである．このことを手がかりとして，今考えている流体に対する運動方程式を導くことができる．

まず，重力の存在下で今考えている流体に作用する力は未知であるとの前提に立ち，重力加速度がゼロの極限での運動方程式を考える:

$$\rho\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla p' + \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i. \tag{40}$$

ここで (29) と (39) を考慮すると，重力の存在下では (40) を以下のように修正すれば良いことが容易に分かる:

$$\rho\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla p' + \frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i + \rho_0\beta_0 T' g\boldsymbol{e}_3 - \rho_0\beta_c c' g\boldsymbol{e}_3. \tag{41}$$

右辺第３項が流体の温度変化に伴って生じる浮力を，第４項が塩分変化に伴って生じる浮力を表している．

実際 (41) からは，プライムのついた変数について一次までの近似で，運動エネルギーの方程式

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega \tfrac{1}{2}\rho|\boldsymbol{u}|^2 dV &= \int_\Sigma u_i\tau_{ij}n_j dS - \int_\Omega \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dV \\ &\quad + \int_\Omega(\rho_0\beta_0 T' g u_3 - \rho_0\beta_c c' g u_3)dV\end{aligned} \tag{42}$$

が導かれる. ただし連続の式 (2) を用い，さらに (27) と (28) により $\nabla\cdot\boldsymbol{u}$ が一次の微少量となることを利用している．上式最後の積分中で，第１項は流体の温度変化に起因する浮力のなす仕事を，第２項は塩分変化に起因する浮力のなす仕事を表している．

上式と内部エネルギーの方程式 (39) を比較すると，上式最後の積分中の第１項が (39) の最後の積分中に符号を変えて現れることが分かる．このことは，流体の温度変化に起因する浮力のなす仕事が，運動エネルギーと内部エネルギー間のエネルギー変換に対応することを示している．同様にして，流体の塩分変化に起因する浮力のなす仕事は，運動エネルギーと位置エネルギー間のエネルギー変換に対応することも理解される．

他方 (41) は，プライムのついた変数について一次までの近似で，以下の方程式と等価であることが分かる:

$$\begin{aligned}\rho_0\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} &= -\nabla p' + \frac{\rho_0}{\rho}\frac{\partial\tau_{ij}}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i \\ &\quad + \rho_0\beta_0 T' g\boldsymbol{e}_3 - \rho_0\beta_c c' g\boldsymbol{e}_3.\end{aligned} \tag{43}$$

この方程式は海水に対する運動方程式としてよく知られるものの一つである [2]．ただし通常，右辺第２項の因子 ρ_0/ρ は 1 と同一視される．我々は (43) を拡張されたブシネスク近似の下での運動方程式として採用しよう．

最後に，(42) に (29) 及び (39) を加えると

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho\left(\tfrac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + gx_3 + e\right)dV \\ &\qquad = \int_\Sigma u_i\tau_{ij}n_j dS - \int_\Sigma \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}dS\end{aligned} \tag{44}$$

が得られる．この式によれば，流体の全エネルギーの変化は，境界 Σ に働く粘性力によりなされる仕事と，Σ を横切る熱輸送とによって生じることになり，極めて合理的である．

なお，本節のエネルギー収支に関する議論において，$\beta_0 = 0$ と仮定した上で $-c'$ を「温度偏差」とみなすと，その結果得られるエネルギー収支は，Mihaljan (1962) によって提示されたもの [8] と形式的に一致することを付記しておく．

5 拡張されたブシネスク近似下での流速に関する条件

前節の議論で我々は，多成分流体に拡張されたブシネスク近似の下で，一般には非発散条件 (1) は成立しないことを見た. 実際，流体の密度が (27) で与えられるにもかかわらず非発散条件 (1) の成立を仮定すると，連続の式 (2) が一般には成立しなくなることは容易に確かめられる．§2 で見たように連続の式 (2) は不可侵であるから，拡張されたブシネスク近似の下で，我々は非発散条件 (1) を一般には課し得ないことになる．

では非発散条件 (1) に代わっていかなる条件を採用すべきかを考えてみよう．まず (22) に (21) と (27) を代入すると，プライムのついた変数について一次までの近似で，次式を得る:

$$\rho_0 Dc'/Dt = -\nabla\cdot\boldsymbol{i}. \tag{45}$$

同様にして，(28) からは次式を得る:

$$\beta_c Dc'/Dt = -\nabla\cdot\boldsymbol{u}. \tag{46}$$

結局，これら二つの式より次式が従う:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = (\beta_c/\rho_0)\nabla\cdot\boldsymbol{i}. \tag{47}$$

かくして我々は，多成分流体に拡張されたブシネスク近似の下で非発散条件 (1) に代わって課すべき条件 (47) を見出した．この条件は多成分流体の速度 $\boldsymbol{u}$ が，その定義通りに単位質量あたりの運動量であることを保証する条件である．

この結果から，拡張されたブシネスク近似の下で，いかなる場合に非発散条件 (1) の使用が正当化されるかが

分かる．すなわち，例えば内部重力波のように流体の構成成分の拡散が無視できる短い時間スケールの現象を記述する際には，$\boldsymbol{i} = 0$ とみなせるので，非発散条件 (1) の使用は正当化される．もちろん，本来のブシネスク近似に帰着する $c' = 0$ の場合にも，非発散条件 (1) の使用が正当化されることは言うまでもない．

一方で，例えば海洋中の熱塩循環のように千年を超える長い時間スケールを持つ現象を議論する際に非発散条件 (1) を課すことは，物理的見地からは，到底認められない．

6 議論

ブシネスク近似を多成分系に拡張することは，系の構成成分の濃度変化に由来する浮力項を運動方程式中に含めることで可能である．他方，この拡張された近似の下で非発散条件 (1) を課すことは，一般には許されないことが明らかとなった．連続の式 (2) の不可侵性がその理由である．

§2 で見たとおり，連続の式 (2) の成立は質量の保存則の成立のみを意味するものではない．それは同時に，運動方程式中に現れる流体の速度 $\boldsymbol{u}$ が流体の単位質量あたりの運動量であることを保証する．従って連続の式 (2) が成立して初めて，運動方程式は運動量の保存則を表すことになるのである．

また §4 の議論では，$|\boldsymbol{u}|^2/2$ が流体の単位質量あたりの運動エネルギーであると暗黙のうちに仮定されている．ところがこの仮定は，$\boldsymbol{u}$ が流体の単位質量あたりの運動量であることを前提としている．従ってこの仮定の正当性もまた，連続の式 (2) の成立により初めて保証されることになる．

そもそも流体力学の方程式は，単なる偏微分方程式ではない．それは何らかの物理法則の数学的表現であり，連続の式 (2) が成立することを前提として定式化されている [5)]．従って連続の式 (2) が成立しないと，方程式と物理法則との間に本来存在するはずの関係が断ち切られてしまうのである．

しかるに現状では，多成分系においても非発散条件 (1) が課され，連続の式 (2) の成立は要求されていない．その結果，多成分系の成分濃度と温度とは理論上全く等価に扱われている [2)]．しかし冷静に考えてみれば，光速どころか音速でさえも無限大の極限で，質量を持つ物質と質量を持たない熱とを全く等価とみなすことは，やはり不合理であると言わざるを得ない．

最後に，拡張されたブシネスク近似の下での運動方程式 (43) について再考しておこう．§4 で見たように，この運動方程式は絶妙なエネルギーバランスの上に構築されている．よってこれを修正する余地は，たとえ存在するにせよ極めて限られているものと思われる．とりわけ，定性的議論に基づいて安易に方程式中の浮力項を「精密化」する試みには，物理的な正当性を見出し得ないであろうことをここで指摘しておきたい．

引用文献

1) Landau, L. D. & Lifshitz, E. M.: *Fluid Mechanics*, 2nd ed., (Butterworth-Heinemann, 1987).

2) McWilliams, J. C.: *Fundamentals of Geophysical Fluid Dynamics*, (Cambridge University Press, 2006).

3) Maruyama, K.: Energetics of a fluid under the Boussinesq approximation, arXiv:1405.1921, (2014).

4) Pedlosky, J.: *Geophysical Fluid Dynamics*, 2nd ed., (Springer, 1987).

5) Aris, R.: *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, (Dover, 1962).

6) 木村竜治: 地球流体力学入門 –大気と海洋の流れのしくみ– (東京堂出版, 1983).

7) Gill, A. E.: *Atmosphere-Ocean Dynamics*, (Academic Press, 1982).

8) Mihaljan, J. M.: A rigorous exposition of the Boussinesq approximations applicable to a thin layer of fluid, *Astrophys. J.*, 136 (1962) 1126–1133.