〔原著論文〕

等温非弾性近似

防衛大学校　地球海洋学科　丸 山 清 志*

Isothermal Anelastic Approximation

*Kiyoshi Maruyama, Department of Earth and Ocean Sciences, National Defense Academy

*E-mail: maruyama@nda.ac.jp

(Refused to receive 8 January 2025)

担当エディタ　ながれ 三郎

This paper constructs a variant of the anelastic approximation; its energetics and the conditions for its applicability are also elucidated. It is shown that the Boussinesq approximation is reproducible as a limiting case of this variant. On the other hand, it also turns out that the variant is inapplicable to an ideal gas.

(**KEY WORDS**): variant of anelastic approximation, energy conversion, Boussinesq approximation

1　はじめに

非弾性近似は，熱的に成層した理想気体の運動を記述するために，Ogura & Phillips (1962) によって考案された [1]．この近似は，気体の圧縮性を部分的に取り入れながら，一方で支配方程式の解から音波を排除する．

Maruyama (2021) は非弾性近似を任意の流体に適用可能な形に再構築した [2]．その結果この近似は，自由対流を研究する際に屡々用いられる古典的なブシネスク近似と，直接的な関係を持たないことが見出された．

本論文の目的は，非弾性近似の一亜種を提示することである．ブシネスク近似は，この「等温」非弾性近似の一極限として再現できる．ただし，この近似は，理想気体には適用できないことが明らかになる．

2　等温非弾性近似

一様重力場中での非粘性流体の運動を考える．流体は固定された有限領域 Ω 中にあり，この領域には z 軸が鉛直上向きに取られているものとする．以後，正の z 軸方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{k}$ で表す．

2.1　運動方程式

流体の速度を $\boldsymbol{u}$ とするとき，運動方程式は

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla p/\rho - g\boldsymbol{k} \tag{1}$$

で与えられる．ここで D/Dt は物質微分を，p 及び ρ は流体の圧力と密度を，g は重力加速度を表す．

さて今，流体の比ギブズ自由エネルギーを φ で表すことにしよう．このとき φ は

$$d\varphi = -s dT + v dp \tag{2}$$

なる関係式を満足する．ここに s 及び T はそれぞれ流体の比エントロピー及び温度を表し，$v = 1/\rho$ は流体の比容である．以下では，全ての熱力学量は φ 及び T の既知関数と見なされる．

関係式 (2) を用いると運動方程式 (1) は

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla\varphi - s\nabla T - g\boldsymbol{k} \tag{3}$$

と書き直せる．ここで φ 及び T を

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi', \quad T = T_0 + T' \tag{4}$$

のように分解しよう．ただし φ_0 及び T_0 は，c_1 及び c_2 を定数として，次式で定義される:

$$\varphi_0 = -gz + c_1, \quad T_0 = c_2. \tag{5}$$

その結果，(3) は以下のように表現されることになる:

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla\varphi' - s\nabla T'. \tag{6}$$

しかるに，φ 及び T の関数と見なすとき，s もまた以下のように分解される:

$$s = s_0 + s'. \tag{7}$$

ただし s_0 は次式で与えられている:

$$s_0 = s(\varphi_0, T_0). \tag{8}$$

ここで以下の仮定を導入しよう:

$$|s'/s_0| \ll 1. \tag{9}$$

この仮定の下で (6) は以下のように近似される:

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla\varphi' - s_0\nabla T'. \tag{10}$$

さらに恒等式 $s_0\nabla T' = \nabla(s_0 T') - T'\nabla s_0$ を用いると

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla(\varphi' + s_0 T') + T'\nabla s_0 \tag{11}$$

を得る．これが等温非弾性近似の下での運動方程式であり，最後の項が当該近似における浮力を表している．

2.2 連続の式

分解 (4) に鑑みれば，流体の密度 ρ も

$$\rho = \rho_0 + \rho' \tag{12}$$

と分解される．ただし ρ_0 は次式で定義されている:

$$\rho_0 = \rho(\varphi_0, T_0). \tag{13}$$

ここで次の仮定を置くことにしよう:

$$|\rho'/\rho_0| \ll 1. \tag{14}$$

このとき ρ は以下のように近似できる:

$$\rho = \rho_0. \tag{15}$$

連続の式 $\partial\rho/\partial t + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = 0$ に (15) を代入して

$$\nabla\cdot(\rho_0\boldsymbol{u}) = 0 \tag{16}$$

なる等温非弾性近似の下での連続の式を得る．

2.3 断熱方程式

熱伝導を無視するとき，熱輸送の一般式 [3)] は

$$\rho_0 T\frac{Ds}{Dt} = 0 \tag{17}$$

となる．ただし近似 (15) を用いた．この方程式は，分解 (4) 及び (7) を考慮すると，プライムのついた変数について一次までの近似で，以下のように書ける:

$$\rho_0 T_0\frac{Ds_0}{Dt} + \rho_0 T'\frac{Ds_0}{Dt} + \rho_0 T_0\frac{Ds'}{Dt} = 0. \tag{18}$$

これより，$Ds_0/Dt = \boldsymbol{u}\cdot\nabla s_0$ である故，次式を得る:

$$\rho_0 T_0\frac{Ds'}{Dt} = -\rho_0 T_0\boldsymbol{u}\cdot\nabla s_0 - \rho_0 T'\boldsymbol{u}\cdot\nabla s_0. \tag{19}$$

これが等温非弾性近似の下での断熱方程式を与える．

しかしながら，方程式系を閉じさせるには，(19) 式中の s' を φ' 及び T' を用いて表現する必要がある．そのためにまず，以下の熱力学関係式に注目しよう:

$$(\partial s/\partial\varphi)_T = -\beta, \quad (\partial s/\partial T)_\varphi = c_p/T - \beta s. \tag{20}$$

ここに $\beta = v^{-1}(\partial v/\partial T)_p$ は流体の熱膨張係数，c_p は定圧比熱である．これより，φ' 及び T' について一次までの近似で，s' は以下のように表現される:

$$\begin{aligned} s' &= (\partial s/\partial\varphi)_T|_{(\varphi_0,T_0)}\varphi' + (\partial s/\partial T)_\varphi|_{(\varphi_0,T_0)}T' \\ &= -\beta_0\varphi' + (c_{p0}/T_0 - \beta_0 s_0)T'. \end{aligned} \tag{21}$$

ただし β_0 及び c_{p0} を次式で定義した:

$$\beta_0 = \beta(\varphi_0, T_0), \quad c_{p0} = c_p(\varphi_0, T_0). \tag{22}$$

以上で等温非弾性近似の定式化は完了した．

2.4 等温非弾性近似の下でのエネルギー論

次いで等温非弾性近似の下での流体のエネルギー収支を考察しよう．まずは次式で与えられる流体の比内部エネルギー e について考えることにする:

$$e = \varphi - p/\rho + Ts. \tag{23}$$

圧力 p は，φ 及び T の関数と見なすとき，

$$p = p_0 + p' \tag{24}$$

と分解される．ただし p_0 は次式で定義されている:

$$p_0 = p(\varphi_0, T_0). \tag{25}$$

分解 (4), (7), (24) を (23) に代入し，近似 (15) を用いると，プライムのついた変数について一次までの近似で

$$\begin{aligned} e &= (\varphi_0 - p_0/\rho_0 + T_0 s_0) \\ &\quad + (\varphi' - p'/\rho_0 + T_0 s' + s_0 T'). \end{aligned} \tag{26}$$

が得られる．

ところで，(2) より，以下の熱力学関係式が従う:

$$(\partial p/\partial\varphi)_T = \rho, \quad (\partial p/\partial T)_\varphi = \rho s. \tag{27}$$

従って，φ' 及び T' について一次までの近似で，p' は

$$\begin{aligned} p' &= (\partial p/\partial\varphi)_T|_{(\varphi_0,T_0)}\varphi' + (\partial p/\partial T)_\varphi|_{(\varphi_0,T_0)}T' \\ &= \rho_0\varphi' + \rho_0 s_0 T'. \end{aligned} \tag{28}$$

と表現される．この表式より，次式が得られる:

$$e = (\varphi_0 - p_0/\rho_0 + T_0 s_0) + T_0 s'. \tag{29}$$

ここで (29) の物質微分を取り，ρ_0 を乗じると

$$\begin{aligned} \rho_0\frac{De}{Dt} &= \rho_0\boldsymbol{u}\cdot\nabla(\varphi_0 - p_0/\rho_0) \\ &\quad + \rho_0 T_0\boldsymbol{u}\cdot\nabla s_0 + \rho_0 T_0\frac{Ds'}{Dt} \end{aligned} \tag{30}$$

を得る．さらに (19) を代入すると次式が従う:

$$\rho_0 \frac{De}{Dt} = \nabla \cdot \{\rho_0(\varphi_0 - p_0/\rho_0)\boldsymbol{u}\} - \rho_0 T' \boldsymbol{u} \cdot \nabla s_0. \quad (31)$$

ただし (16) を用いた．ところで $\rho_0 De/Dt$ が

$$\rho_0 \frac{De}{Dt} = \rho_0 \frac{\partial e}{\partial t} + \rho_0 \boldsymbol{u} \cdot \nabla e = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 e) + \nabla \cdot (\rho_0 e \boldsymbol{u}) \quad (32)$$

と書けることに注意しよう．よって，(29) を用いると，(31) は以下のように書き直せる:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 e) + \nabla \cdot \{\rho_0 T_0 (s_0 + s')\boldsymbol{u}\} = -\rho_0 T' \boldsymbol{u} \cdot \nabla s_0. \quad (33)$$

最後に，領域 Ω に亘って (33) を積分すると

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \rho_0 e \, dV = -\int_\Omega \rho_0 T' \boldsymbol{u} \cdot \nabla s_0 \, dV \quad (34)$$

を得る．ただし Ω の境界上で $\boldsymbol{u}$ の法線成分はゼロになるものと仮定した．これが流体の内部エネルギーの時間変化を記述する方程式である．

一方，流体の位置エネルギーは不変である:

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \rho_0 g z \, dV = 0. \quad (35)$$

この事実は近似 (15) の論理的帰結である．

続いて流体の運動エネルギーについて検討しよう．そのために，まず運動方程式 (11) を (28) を用いて

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla(p'/\rho_0) + T' \nabla s_0 \quad (36)$$

と書き直す．これと $\rho_0 \boldsymbol{u}$ の内積を取ると，簡単な操作の後に，次式を得る:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\rho_0 |\boldsymbol{u}|^2) + \nabla \cdot \left\{\rho_0(\tfrac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + p'/\rho_0)\boldsymbol{u}\right\} \\ &\qquad = \rho_0 T' \boldsymbol{u} \cdot \nabla s_0. \end{aligned} \quad (37)$$

これを領域 Ω に亘って積分すると

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \tfrac{1}{2}\rho_0 |\boldsymbol{u}|^2 dV = \int_\Omega \rho_0 T' \boldsymbol{u} \cdot \nabla s_0 \, dV \quad (38)$$

が従う．かくして流体の運動エネルギーの時間変化を記述する方程式が得られた．右辺の項は等温非弾性近似における浮力によってなされる仕事を表している．

以上で導かれたエネルギー方程式 (34), (35), (38) を全て加え合わせると，最終的に次式が得られる:

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \rho_0 \left(\tfrac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 + g z + e\right) dV = 0. \quad (39)$$

すなわち流体の全エネルギーは保存される．この結果は，等温非弾性近似がエネルギー保存則と整合的であることを示している．

さらに，(34) と (38) を比較すると，等温非弾性近似における浮力のなす仕事が，非弾性近似におけるそれと同様に [2)]，運動エネルギーと内部エネルギー間のエネルギー変換に対応することが見て取れる．この結論は，Maruyama (2014) によりブシネスク近似における浮力について得られたものと一致している [4)]．

2.5 等温非弾性近似の適用可能性

等温非弾性近似は二つの仮定 (9) 及び (14) に基づいて導かれた．以下での我々の目標は，いかなる条件の下でこれら二つの仮定が正当化され得るかを明らかにすることである．仮定 (14) の考察から始めよう．

まず，以下の熱力学関係式に注目する:

$$\begin{aligned} &(\partial\rho/\partial\varphi)_T = \rho(\gamma/a^2), \\ &(\partial\rho/\partial T)_\varphi = \rho\left\{s(\gamma/a^2) - \beta\right\}. \end{aligned} \quad (40)$$

ここで γ は比熱比，a は音速である．これら関係式を用いると，(14) の ρ' は，φ' 及び T' について一次までの近似で，次のように表現できる:

$$\begin{aligned} \rho' &= (\partial\rho/\partial\varphi)_T|_{(\varphi_0,T_0)}\varphi' + (\partial\rho/\partial T)_\varphi|_{(\varphi_0,T_0)}T' \\ &= \rho_0(\gamma_0/a_0^2)\varphi' + \rho_0\left\{s_0(\gamma_0/a_0^2) - \beta_0\right\}T'. \end{aligned} \quad (41)$$

ただし，以下の記法を導入した:

$$\gamma_0 = \gamma(\varphi_0, T_0), \quad a_0 = a(\varphi_0, T_0). \quad (42)$$

この ρ' に対する表現により，仮定 (14) の左辺は

$$\begin{aligned} |\rho'/\rho_0| = O\{&\gamma_0(gH/a_0^2)(\Delta\varphi'/gH)\} \\ &+ O\{\gamma_0(gH/a_0^2)(s_0\Delta T'/gH)\} \\ &+ O(\beta_0 \Delta T') \end{aligned} \quad (43)$$

と見積もられる．ただし H は流体が占める領域 Ω の鉛直方向の広がりを，$\Delta\varphi'$ 及び $\Delta T'$ は φ' 及び T' の特徴的なスケールを表す．我々はここで，Maruyama (2021) に従い [2)]，次の条件が成立するものと仮定する:

$$(gH)^{1/2}/a_0 \le O(1). \quad (44)$$

このとき，$\gamma_0 = O(1)$ である故に，(14) は以下の条件の下で満足されることになる:

$$\Delta\varphi'/gH \ll 1, \quad (45)$$

$$s_0 \Delta T'/gH \ll 1, \quad (46)$$

$$\beta_0 \Delta T' \ll 1. \quad (47)$$

他方，(21) を用いると，(9) の左辺を以下のように見積もることができる:

$$\begin{aligned} &|s'/s_0| \\ &= O\{(c_{p0}/s_0)(\Gamma_0 H/\Delta T')(\Delta T'/T_0)(\Delta\varphi'/gH)\} \\ &\quad + O\{(c_{p0}/s_0)(\Delta T'/T_0)\} + O(\beta_0 \Delta T'). \end{aligned} \quad (48)$$

ここに $\Gamma_0 = \beta_0 T_0 g/c_{p0}$ は断熱減率を表す．流体の運動が断熱的であることから，$\Gamma_0, H, \Delta T'$ の間には，以下に示す条件が成立するものと期待される:

$$\Gamma_0 H/\Delta T' \le O(1). \quad (49)$$

さらに，$c_{p0} = T_0(\partial s/\partial T)_p|_{(\varphi_0,T_0)}$ なので，

$$c_{p0}/s_0 \leq O(1) \tag{50}$$

と仮定するのが合理的であろう．このとき (48) より，(9) は，(45) 及び (47) と共に

$$\Delta T'/T_0 \ll 1 \tag{51}$$

なる条件が成立すれば満足されることが分かる．

ところで，(6) より，

$$|\nabla\varphi'| \leq |\partial \boldsymbol{u}/\partial t| + |(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}| + |s\nabla T'| \tag{52}$$

なる不等式が従うことに注意しよう．流体の運動を特徴づける長さスケールを L とすると，

$$|\nabla\varphi'| = O(\Delta\varphi'/L), \quad |\nabla T'| = O(\Delta T'/L) \tag{53}$$

と書くことができる．他方，U を運動の特徴的な速度スケールとすると，

$$|\partial\boldsymbol{u}/\partial t| = O(U/\tau), \quad |(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}| = O(U^2/L) \tag{54}$$

が得られる．ただし τ は運動の特徴的な時間スケールを表す．ここで，(5) の定数 c_1 及び c_2 が，以下に示す条件を満たすように選ばれているものと仮定する:

$$s/s_0 \leq O(1). \tag{55}$$

このとき，(52), (53), (54) から分かるように，

$$U/(gH)^{1/2} \ll 1, \quad (L/\tau)/(gH)^{1/2} \ll 1 \tag{56}$$

が (46) と共に成立すれば，(45) は満足される．

最後に (46) が次のように書けることに注意しよう:

$$\beta_0\Delta T' \ll (c_{p0}/s_0)(\Gamma_0 H/\Delta T')(\Delta T'/T_0). \tag{57}$$

これより，$\beta_0\Delta T' \ll 1$ なる条件 (47) は，(46), (49), (50), (51) が満たされれば成立することが分かる．

結局，等温非弾性近似は，以下の条件の下で適用可能となる: (44), (46), (49), (50), (51), (55), (56).

3 浅い流体層への適用

本節において我々は，等温非弾性近似を「浅い」流体層に適用する．目標は，ブシネスク近似を等温非弾性近似の一極限として再現することである．

前節で考えた流体の密度 $\rho = \rho_0$ は

$$\begin{aligned}\nabla\rho_0 &= (\partial\rho/\partial\varphi)_T|_{(\varphi_0,T_0)}\nabla\varphi_0 \\ &\quad + (\partial\rho/\partial T)_\varphi|_{(\varphi_0,T_0)}\nabla T_0 \\ &= -(\rho_0\gamma_0 g/a_0^2)\boldsymbol{k}.\end{aligned} \tag{58}$$

から分かるように，高度とともに変化する．しかしながら ρ_0 は，以下の条件が満たされる場合には，一定とみなして差し支えない:

$$\Delta\rho_0/\rho_0 \ll 1. \tag{59}$$

ただし $\Delta\rho_0$ は，流体の鉛直方向の広がり H に亘る ρ_0 の変化のスケールである．このスケールについては

$$\Delta\rho_0 = |\nabla\rho_0|H = \rho_0\gamma_0 gH/a_0^2 \tag{60}$$

と置くのが妥当であろう．よって ρ_0 は，$\gamma_0 = O(1)$ である故，以下の条件の下では一定とみなし得る:

$$(gH)^{1/2}/a_0 \ll 1. \tag{61}$$

このとき，連続の式 $\partial\rho/\partial t + \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}) = 0$ は

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{62}$$

に帰着する．一方，(36) なる形式に書き直された運動方程式は，さらに以下のように書き直される:

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla p'/\rho_0 + \beta_0 T' g\boldsymbol{k}. \tag{63}$$

ただし (5) 及び (20) から得られる次式を用いた:

$$\begin{aligned}\nabla s_0 &= (\partial s/\partial\varphi)_T|_{(\varphi_0,T_0)}\nabla\varphi_0 \\ &\quad + (\partial s/\partial T)_\varphi|_{(\varphi_0,T_0)}\nabla T_0 \\ &= \beta_0 g\boldsymbol{k}.\end{aligned} \tag{64}$$

連続の式 (62) と運動方程式 (63) は，ブシネスク近似の下で成立するものと同じものである．

次に熱輸送の一般式 (17) に注目する．これは，(20) を考慮すると，φ と T を用いて

$$-\rho_0\beta T\frac{D\varphi}{Dt} + (\rho_0 c_p - \rho_0\beta T s)\frac{DT}{Dt} = 0 \tag{65}$$

と表現される．しかるに，この式中の c_p 及び β は，分解 (4) を踏まえると，以下のように分解できる:

$$c_p = c_{p0} + c_p', \quad \beta = \beta_0 + \beta'. \tag{66}$$

かくして我々は，プライムのついた変数について一次までの近似で，次式を得る:

$$\begin{aligned}\rho_0 c_{p_0}\frac{DT'}{Dt} = \rho_0\beta_0 T_0\Bigg\{&\frac{D\varphi_0}{Dt} + \frac{T'}{T_0}\frac{D\varphi_0}{Dt} \\ &+ \frac{\beta'}{\beta_0}\frac{D\varphi_0}{Dt} + \frac{D\varphi'}{Dt} + s_0\frac{DT'}{Dt}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{67}$$

さて今，φ_0 の変化のスケールを $\Delta\varphi_0$ で示すことにしよう．すると (5) から明らかに

$$\Delta\varphi_0 = gH \tag{68}$$

が成立する．一方，φ' 及び T' について一次までの近似で，β' は以下のように表現される:

$$\beta' = (\partial\beta/\partial\varphi)_T|_{(\varphi_0,T_0)}\varphi' + (\partial\beta/\partial T)_\varphi|_{(\varphi_0,T_0)}T'. \quad (69)$$

これより β'/β_0 は，次のように見積もられる:

$$\begin{aligned}&|\beta'/\beta_0|\\&= O\left\{\left|gH(\partial\beta/\partial\varphi)_T|_{(\varphi_0,T_0)}/\beta_0\right|(\Delta\varphi'/gH)\right\}\\&\quad + O\left\{\left|T_0(\partial\beta/\partial T)_\varphi|_{(\varphi_0,T_0)}/\beta_0\right|(\Delta T'/T_0)\right\}.\end{aligned} \quad (70)$$

ここで，以下の条件が成り立つものと仮定しよう:

$$\begin{aligned}&\left|gH(\partial\beta/\partial\varphi)_T|_{(\varphi_0,T_0)}/\beta_0\right| \le O(1),\\&\left|T_0(\partial\beta/\partial T)_\varphi|_{(\varphi_0,T_0)}/\beta_0\right| \le O(1).\end{aligned} \quad (71)$$

このとき，等温非弾性近似の下で成立する条件 (45), (46), (51) を踏まえると，(67) の中括弧内の項のうち，プライムのついた変数を含む項は，全て第１項に比して無視することができる．かくして我々は

$$\rho_0 c_{p_0}\frac{DT'}{Dt} = \rho_0\beta_0 T_0\frac{D\varphi_0}{Dt} \quad (72)$$

を得る．右辺の項は $-\rho_0\beta_0 T_0 g\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{k}$ と書けるが，流体の鉛直運動に伴う断熱加熱・冷却を表している．

しかしながら (72) 右辺の項も，条件

$$\Gamma_0 H/\Delta T' \ll 1 \quad (73)$$

が成立すれば無視することができる．この場合 (72) は

$$\rho_0 c_{p_0}\frac{DT'}{Dt} = 0 \quad (74)$$

に帰着する．これはブシネスク近似の下での断熱方程式と一致している．

4　まとめと議論

非弾性近似の一亜種である等温非弾性近似を定式化した．この近似の下での流体のエネルギー論，ならびに近似の適用可能性条件についても議論した．さらに，ブシネスク近似が，当該近似の一極限として再現可能であることも示された．

4.1　運動方程式の別形式

等温非弾性近似の下での運動方程式は，それぞれ (28) 及び (41) によって定義される p' 及び ρ' を用いて

$$\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} = -\nabla p'/\rho_0 - (\rho' g/\rho_0)\boldsymbol{k} \quad (75)$$

という形に表現され得る．以下で説明するとおり，この形の運動方程式は (36) から導くことができる．

まず (36) の右辺第１項を

$$-\nabla(p'/\rho_0) = -\nabla p'/\rho_0 + (p'/\rho_0)(\nabla\rho_0/\rho_0) \quad (76)$$

のように書き換える．ここで $p'/\rho_0 = \varphi' + s_0 T'$ であること，ならびに $\nabla\rho_0/\rho_0 = -(\partial\rho/\partial\varphi)_T|_{(\varphi_0,T_0)}(g/\rho_0)\boldsymbol{k}$ と書けることに注意すると，次の表式が得られる:

$$\begin{aligned}&-\nabla(p'/\rho_0)\\&= -\nabla p'/\rho_0 - \left\{(\partial\rho/\partial\varphi)_T|_{(\varphi_0,T_0)}\varphi'\right.\\&\qquad\left.+ s_0(\partial\rho/\partial\varphi)_T|_{(\varphi_0,T_0)}T'\right\}(g/\rho_0)\boldsymbol{k}.\end{aligned} \quad (77)$$

他方，(36) の右辺第２項も以下のように書き直せる:

$$T'\nabla s_0 = -\rho_0(\partial s/\partial\varphi)_T|_{(\varphi_0,T_0)}T'(g/\rho_0)\boldsymbol{k}. \quad (78)$$

表式 (77) 及び (78) を (36) に代入すると

$$\begin{aligned}\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} &= -\nabla p'/\rho_0\\&\quad - \left[(\partial\rho/\partial\varphi)_T|_{(\varphi_0,T_0)}\varphi'\right.\\&\qquad\left.+ \{\partial(\rho s)/\partial\varphi\}_T|_{(\varphi_0,T_0)}T'\right](g/\rho_0)\boldsymbol{k}.\end{aligned} \quad (79)$$

を得る．しかるに，(27) より次の関係式が従う:

$$\{\partial(\rho s)/\partial\varphi\}_T = (\partial\rho/\partial T)_\varphi. \quad (80)$$

この関係式を (79) に代入して，次式を得る:

$$\begin{aligned}\frac{D\boldsymbol{u}}{Dt} &= -\nabla p'/\rho_0\\&\quad - \left\{(\partial\rho/\partial\varphi)_T|_{(\varphi_0,T_0)}\varphi'\right.\\&\qquad\left.+ (\partial\rho/\partial T)_\varphi|_{(\varphi_0,T_0)}T'\right\}(g/\rho_0)\boldsymbol{k}.\end{aligned} \quad (81)$$

これは，(41) に照らせば，(75) と同じ方程式である．

以上の結果にも関わらず，等温非弾性近似の下での流体の密度は，$\rho_0 + \rho'$ ではなく ρ_0 により与えられる．この事実を本小節の最後に強調しておきたい．

4.2　条件 (46) について

等温非弾性近似の適用可能性条件のうち，特に (46) に注目しよう．この条件は (57) なる形に表現できる．

条件 (49) と (50) が成立する限り，(57) は

$$\beta_0\Delta T' \ll \Delta T'/T_0 \quad (82)$$

を要求する．これは過度に制限的な条件である．実際，理想気体については，$\beta_0 = 1/T_0$ が成立するので，この条件が満足されることは決してない．従って等温非弾性近似は，理想気体には適用できないことになる．

しかしながら，(46) なる条件は，ブシネスク近似の適用可能性条件としては不要である．それは，より穏やかな条件 (47) によって置き換えられる [5]．従ってブシネスク近似は，理想気体にも適用できる．

以上より我々は，次の結論へと導かれる．すなわち，ブシネスク近似は，等温非弾性近似の一極限として再現可能ではあるものの，それは，非弾性近似のこの亜種に，ごく部分的に含まれているに過ぎない．

引用文献

1) Ogura, Y. and Phillips, N. A.: Scale analysis of deep and shallow convection in the atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, 19 (1962) 173–179.
2) Maruyama, K.: Anelastic approximation, Zenodo, https://doi.org/10.5281/zenodo.4596697 (accessed 2024-11-01), (2021).
3) Landau, L. D. & Lifshitz, E. M.: *Fluid Mechanics*, 2nd ed., (Butterworth-Heinemann, 1987).
4) Maruyama, K.: Energetics of a fluid under the Boussinesq approximation, arXiv:1405.1921, (2014).
5) Maruyama, K.: Rational derivation of the Boussinesq approximation, Zenodo, https://doi.org/10.5281/zenodo.3757250 (accessed 2024-11-01), (2019).