

等温非弹性近似

防衛大学校地球海洋学科
丸山清志

Ogura, Y. & Phillips, N. A. (1962)

Scale analysis of deep and shallow convection
in the atmosphere

Journal of the atmospheric sciences
19(2), 173-179

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -c_p\theta_0\nabla\Pi' + (g\theta'/\theta_0)\mathbf{k}$$

一定の基準温位

摂動エクスナー関数

温位偏差

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0$$

等温位大気の密度

$$\frac{D\theta'}{Dt} = 0$$

非弾性近似の利点

支配方程式系の解に
音波が含まれない

密度の高度変化が無視できないような
深い流体層に適用可能

非弾性近似の欠点

理想気体にしか適用できない

原因

熱力学変数として温度と共に
エクスター関数が用いられている

任意の流体に適用可能な形に 非弾性近似を再構築(2023)

<https://doi.org/10.5281/zenodo.14621801>

非弾性近似の下での運動方程式

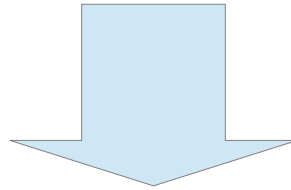
熱力学の基本式

$$dh = Tds + vdp, \quad v = 1/\rho$$

比エンタルピー

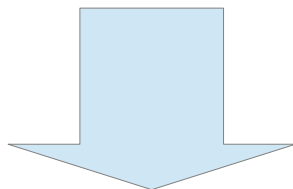
比エントロピー

比容



$$\nabla p / \rho = \nabla h - T \nabla s$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p / \rho - g\mathbf{k}$$



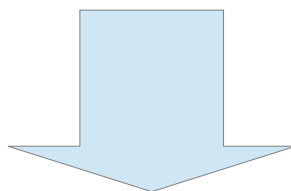
$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla h + T\nabla s - g\mathbf{k}$$

$$h = h_0 + h', \quad s = s_0 + s'$$

ただし

$$h_0 = -gz + c_1, \quad s_0 = c_2$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla h + T\nabla s - g\mathbf{k}$$



$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla h' + T\nabla s'$$

温度

$$T = T_0 + T', \quad T_0 = T(h_0, s_0)$$



仮定1

$$|T'/T_0| \ll 1$$

浮力

$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla(h' - T_0 s') - s' \nabla T_0$$

非弾性近似の下での運動方程式

非弾性近似の下での連続の式

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad \rho_0 = \rho(h_0, s_0)$$



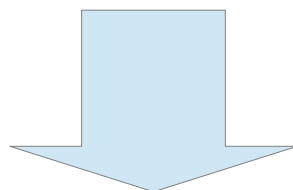
仮定2

$$|\rho' / \rho_0| \ll 1$$

$$\rho = \rho_0$$

非弾性近似の本質

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$



$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0$$

非弾性近似の下での連続の式

非弾性近似再構築の結果

非弾性近似が適用可能となる条件が明確化された

非弾性近似下で浮力のなす仕事は内部エネルギーと運動エネルギー間のエネルギー変換に対応することが明らかになった

ブシネスク近似は非弾性近似の一極限ではないことが明らかになった

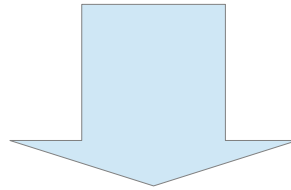
ブシネスク近似が
非弾性近似の一極限ではない理由

流体層は浅い

$$(gH)^{1/2}/a_0 \ll 1, \quad a_0 = a(h_0, s_0)$$

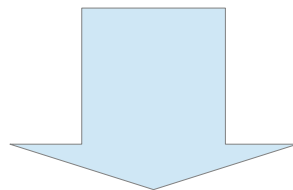
流体層の厚さ

音速



$$\rho_0 \approx \text{constant}$$

連続の式



$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$$

さらに

$$\Gamma_0 H/T_0 \ll 1, \quad \Gamma_0 = \Gamma(h_0, s_0)$$

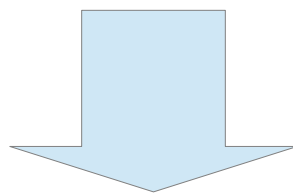
断熱減率

ただし

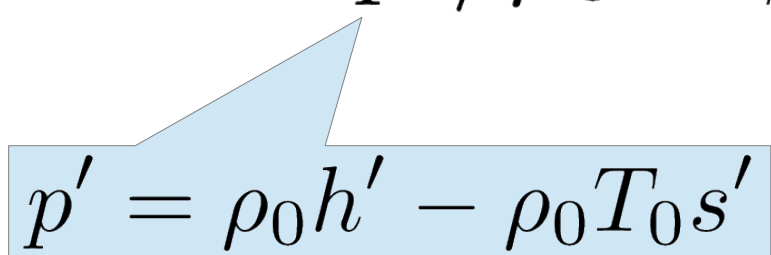
$$\frac{\Gamma_0 H/T_0}{\beta_0 T_0} \geq O(1), \quad \beta_0 = \beta(h_0, s_0)$$

熱膨張係数

運動方程式



$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p' / \rho_0 + \beta_0 T' g \mathbf{k}$$


$$p' = \rho_0 h' - \rho_0 T_0 s'$$

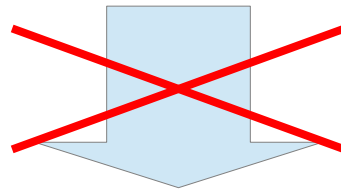
同じ条件

$$\Gamma_0 H / T_0 \ll 1$$

同時に

$$\frac{\Gamma_0 H / T_0}{\beta_0 T_0} \ll 1$$

運動方程式



$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p' / \rho_0 + \beta_0 T' g \mathbf{k}$$

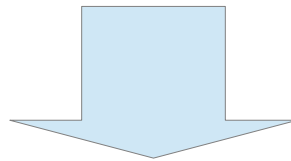
等温位分布からの偏差

ブシネスク近似は
非弾性近似の一極限ではない

ブシネスク近似をその一極限として含む
非弾性近似の亜種を構成する

非弾性近似成功の鍵

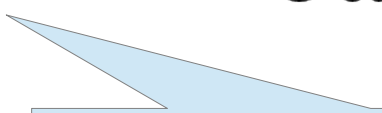
比エンタルピーと比エントロピー
を用いることにより
運動方程式から密度が排除される



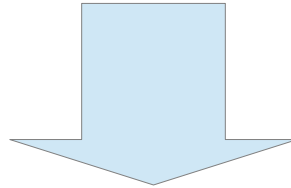
運動方程式に対する近似と
密度に対する近似が
完全に分離される

熱力学の基本式

$$d\varphi = -s dT + v dp, \quad v = 1/\rho$$

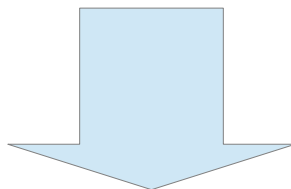


比ギブズ自由エネルギー



$$\nabla p / \rho = \nabla \varphi + s \nabla T$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p / \rho - g\mathbf{k}$$



$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla\varphi - s\nabla T - g\mathbf{k}$$

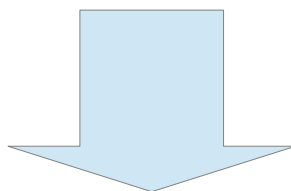
等温非弾性近似の下での運動方程式

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi', \quad T = T_0 + T'$$

ただし

$$\varphi_0 = -gz + c_1, \quad T_0 = c_2$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla\varphi - s\nabla T - g\mathbf{k}$$



$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla\varphi' - s\nabla T'$$

比エントロピー

$$s = s_0 + s', \quad s_0 = s(\varphi_0, T_0)$$



仮定1

$$|s'/s_0| \ll 1$$

浮力

$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla(\varphi' + s_0 T') + T' \nabla s_0$$

等温非弾性近似の下での運動方程式

等温非弾性近似下で浮力のなす仕事は
非弾性近似と同様に
内部エネルギーと運動エネルギー間の
エネルギー変換に対応する

等温非弾性近似の下での連続の式

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad \rho_0 = \rho(\varphi_0, T_0)$$

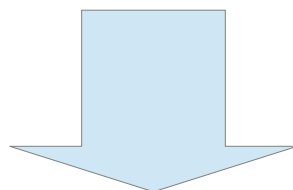


仮定2

$$|\rho' / \rho_0| \ll 1$$

$$\rho = \rho_0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$



$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0$$

等温非弾性近似の下での連続の式

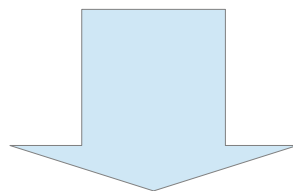
ブシネスク近似の再現

流体層は浅い

$$(gH)^{1/2} / a_0 \ll 1, \quad a_0 = a(\varphi_0, T_0)$$

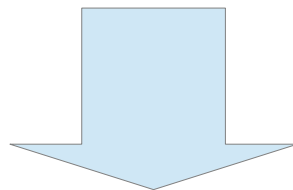
流体層の厚さ

音速



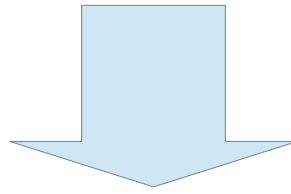
$$\rho_0 \approx \text{constant}$$

連続の式



$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$$

運動方程式



等温分布からの偏差

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p' / \rho_0 + \beta_0 T' g \mathbf{k}$$

$$p' = \rho_0 \varphi' + \rho_0 s_0 T'$$

$$\beta_0 = \beta(\varphi_0, T_0)$$

ブシネスク近似は
等温非弾性近似の一極限として
再現可能である

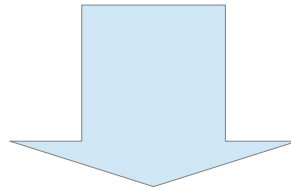
等温非弾性近似下で浮力のなす仕事は
非弾性近似と同様に
内部エネルギーと運動エネルギー間の
エネルギー変換に対応する

ブシネスク近似下で浮力のなす仕事は
内部エネルギーと運動エネルギー間の
エネルギー変換に対応する

<https://doi.org/10.5281/zenodo.4013781>

等温非弾性近似が適用可能となる条件

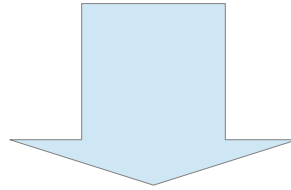
$$\beta_0 T_0 \ll 1$$



等温非弾性近似は
理想気体には適用できない

ブシネスク近似は
理想気体にも適用可能

<https://doi.org/10.5281/zenodo.4013785>



ブシネスク近似は等温非弾性近似に
部分的に含まれているに過ぎない

結論

- 等温非弾性近似という非弾性近似の亜種を構成した.
- ブシネスク近似は等温非弾性近似の一極限として再現可能であることが示された.
- 等温非弾性近似下で浮力のなす仕事は, 内部エネルギーと運動エネルギー間のエネルギー変換に対応する.
- 従って, ブシネスク近似下で浮力のなす仕事も, 内部エネルギーと運動エネルギー間のエネルギー変換に対応する.
- ただし, 等温非弾性近似が適用可能となる条件の考察からこの近似は理想気体には適用できないことが分かった.
- ブシネスク近似は理想気体にも適用可能であることから, ブシネスク近似は等温非弾性近似に, ごく部分的に含まれているに過ぎないことも明らかになった.

等温非弾性近似

防衛大学校地球海洋学科
丸山清志

防衛大学校地球海洋学科の丸山です。

只今から、私が等温非弾性近似と名付けた非弾性近似の亜種について発表させていただきます。

そもそも、非弾性近似は…

Ogura, Y. & Phillips, N. A. (1962)

Scale analysis of deep and shallow convection
in the atmosphere

Journal of the atmospheric sciences
19(2), 173-179

Ogura & Phillips (1962)により考案された近似です。
この近似の下での支配方程式系は…

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -c_p\theta_0\nabla\Pi' + (g\theta'/\theta_0)\mathbf{k}$$

一定の基準温位

摂動エクスター関数

温位偏差

$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0$$

等温位大気の密度

$$\frac{D\theta'}{Dt} = 0$$

このようなものです。

等温位大気を基本場として、そこからの偏差を記述する方程式系となっています。

非弾性近似の利点

支配方程式系の解に
音波が含まれない

密度の高度変化が無視できないような
深い流体層に適用可能

この近似の利点は…

一つには, 支配方程式系の解に音波が含まれないこと.

もう一つは, 密度の高度変化が無視できないような深い流体層に適用できることです.

非弾性近似の欠点

理想気体にしか適用できない

原因

熱力学変数として温度と共に
エクスナー関数が用いられている

一方, その欠点は…

支配方程式系が, そのままでは理想気体にしか適用できないことです.

その原因は…

熱力学変数として, 温度と共に, 理想気体に対してのみ定義可能なエクスナー関数というものが用いられているからです.

任意の流体に適用可能な形に 非弾性近似を再構築(2023)

<https://doi.org/10.5281/zenodo.14621801>

そこで2023年の発表では, 任意の流体に適用可能な形に非弾性近似を再構築しました.

その概要を, 今回の話に先立って説明したいと思います.

非弾性近似の下での運動方程式

まず, 非弾性近似の下での運動方程式を再構築するために…

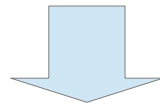
熱力学の基本式

$$dh = Tds + vdp, \quad v = 1/\rho$$

比エンタルピー

比エントロピー

比容

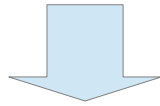


$$\nabla p / \rho = \nabla h - T \nabla s$$

熱力学の基本式と呼ばれるこの式に注目しました。

この式を用いますと、圧力傾度力は、このように表されますので…

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p/\rho - g\mathbf{k}$$



$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla h + T\nabla s - g\mathbf{k}$$

非粘性流体の運動方程式はこのようになります。

次に, 比エンタルピー及び比エントロピーを…

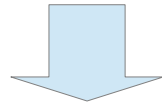
$$h = h_0 + h', \quad s = s_0 + s'$$

ただし

$$h_0 = -gz + c_1, \quad s_0 = c_2$$

このように分解します.

$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla h + T\nabla s - g\mathbf{k}$$



$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla h' + T\nabla s'$$

温度

その結果, さきほどの方程式はこのようなになります.

次いで, ここに現れる温度も…

$$T = T_0 + T', \quad T_0 = T(h_0, s_0)$$

仮定1

$$|T'/T_0| \ll 1$$

このように分解します.

ここで, 流体の温度分布がほぼ等エントロピー分布である, という仮定を導入します.

その結果, 非弾性近似の下での運動方程式は...

浮力

$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla(h' - T_0 s') - s' \nabla T_0$$

非弾性近似の下での運動方程式

このようになります。

流体が理想気体のときには、これが最初にお見せした運動方程式に帰着することは容易に示すことができます。

なお、この最後の項は、非弾性近似下で浮力と称される力を表しています。

非弾性近似の下での連続の式

次に, 非弾性近似の下での連続の式についてですが…

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad \rho_0 = \rho(h_0, s_0)$$

仮定2

$$|\rho' / \rho_0| \ll 1$$

まず, 流体の密度を温度と同様に分解します.

その上で, 流体の密度分布がほぼ等エントロピー分布である, という仮定を導入します.

このとき...

$$\rho = \rho_0$$

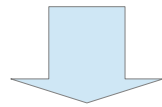
非弾性近似の本質

流体の密度を, このように近似することができます.

この近似こそが, 実は非弾性近似の本質です.

この近似の下で...

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$



$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0$$

非弾性近似の下での連続の式

連続の式は…

このように簡単化されますが、これが非弾性近似の下での連続の式となります。

非弾性近似再構築の結果

以上のようにして, 非弾性近似を任意の流体に適用可能な形に再構築した結果…

非弾性近似が適用可能となる条件が明確化された

非弾性近似下で浮力のなす仕事は内部エネルギーと運動エネルギー間のエネルギー変換に対応することが明らかになった

ブシネスク近似は非弾性近似の一極限ではないことが明らかになった

非弾性近似が適用可能となる条件が明確化され…

非弾性近似下で浮力のなす仕事は内部エネルギーと運動エネルギー間のエネルギー変換に対応することが明らかになり…

さらに、ブシネスク近似は非弾性近似の一極限ではないことが明らかになりました。

ブシネスク近似が 非弾性近似の一極限ではない理由

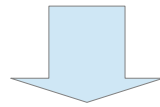
これらの結果のうち, 以下では, ブシネスク近似が非弾性近似の一極限ではない理由を説明したいと思います.

流体層は浅い

$$(gH)^{1/2}/a_0 \ll 1, \quad a_0 = a(h_0, s_0)$$

流体層の厚さ

音速

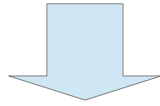


$$\rho_0 \approx \text{constant}$$

そのためにまず,このような条件が成立するという意味で, 流体層は浅いものと仮定します.

このとき ρ_0 は一定とみなすことができます. その結果...

連続の式



$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$$

連続の式は,こうなります.これはブシネスク近似の下での連続の式と同じものです.

さらに

$$\Gamma_0 H/T_0 \ll 1, \quad \Gamma_0 = \Gamma(h_0, s_0)$$

断熱減率

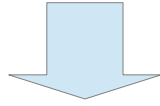
ただし

$$\frac{\Gamma_0 H/T_0}{\beta_0 T_0} \geq O(1), \quad \beta_0 = \beta(h_0, s_0)$$

熱膨張係数

さらに,このような条件も成立するものと仮定します.
ただし,この条件は満たされているものとしますと…

運動方程式



$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p' / \rho_0 + \beta_0 T' g \mathbf{k}$$


$$p' = \rho_0 h' - \rho_0 T_0 s'$$

運動方程式は, このように近似されます。

この運動方程式は, ブシネスク近似下で得られるものと形式的には同じものです。

しかしながら…

同じ条件

$$\Gamma_0 H / T_0 \ll 1$$

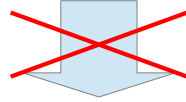
同時に

$$\frac{\Gamma_0 H / T_0}{\beta_0 T_0} \ll 1$$

先ほどと同じ条件が成立していても…

同時に, 理想気体がそうであるように, この条件が当てはまる場合…

運動方程式



$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla p' / \rho_0 + \beta_0 T' g \mathbf{k}$$

等温位分布からの偏差

運動方程式に対する先ほどの近似は…

成立しません.

さらに, この方程式中の温度偏差が, 等温位分布からの偏差であることに注意が必要です.

ブシネスク近似においてこれに対応する量は, 等温分布からの偏差を表しています.

以上より…

ブシネスク近似は
非弾性近似の一極限ではない

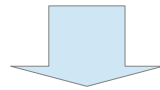
ブシネスク近似は非弾性近似の一極限ではない, と結論
することができます.

ブシネスク近似をその一極限として含む 非弾性近似の亜種を構成する

そこで今回は, ブシネスク近似をその一極限として含む非弾性近似の亜種, すなわち等温非弾性近似, を構成することにいたしました.

非弾性近似成功の鍵

比エンタルピーと比エントロピー
を用いることにより
運動方程式から密度が排除される



運動方程式に対する近似と
密度に対する近似が
完全に分離される

そのためにまず, 非弾性近似成功の鍵が何であったかを考えてみますと…

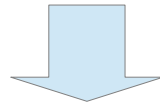
熱力学変数として, 比エンタルピーと比エントロピーを用いることにより運動方程式から密度が排除され…

その結果, 運動方程式に対する近似と密度に対する近似とが完全に分離されたからである, と言えます.

熱力学の基本式

$$d\varphi = -sdT + vdp, \quad v = 1/\rho$$

比ギブズ自由エネルギー

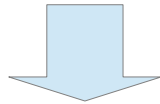


$$\nabla p / \rho = \nabla \varphi + s \nabla T$$

それを踏まえて今回は、この形式の熱力学の基本式に注目しました。

この式を用いると、圧力傾度力はこう表現されますので…

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p / \rho - g\mathbf{k}$$



$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla\varphi - s\nabla T - g\mathbf{k}$$

非粘性流体の運動方程式から, このように密度が排除されます.

以後は, 全ての熱力学変数を比ギブズ自由エネルギーと温度の既知関数とみなして, 等温非弾性近似下での運動方程式と連続の式を定式化してゆくことにします.

等温非弾性近似の下での運動方程式

まずはじめに, 等温非弾性近似の下での運動方程式を導くために…

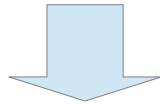
$$\varphi = \varphi_0 + \varphi', \quad T = T_0 + T'$$

ただし

$$\varphi_0 = -gz + c_1, \quad T_0 = c_2$$

比ギブズ自由エネルギーと温度をこのように分解します.

$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla\varphi - s\nabla T - g\mathbf{k}$$



$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla\varphi' - s\nabla T'$$

比エントロピー

その結果, 運動方程式はこうなります.

次いで, ここに現れる比エントロピーも...

$$s = s_0 + s', \quad s_0 = s(\varphi_0, T_0)$$

仮定1

$$|s'/s_0| \ll 1$$

このように分解します.

ここで, 流体の比エントロピー分布がほぼ静水圧下の等温分布であると仮定しますと…

浮力

$$\frac{Du}{Dt} = -\nabla(\varphi' + s_0 T') + T' \nabla s_0$$

等温非弾性近似の下での運動方程式

等温非弾性近似の下での運動方程式が導かれます。

この最後の項が等温非弾性近似の下での浮力を表しますが…

等温非弾性近似下で浮力のなす仕事は
非弾性近似と同様に
内部エネルギーと運動エネルギー間の
エネルギー変換に対応する

この浮力のなす仕事は, 非弾性近似と同様に, 内部エネルギーと運動エネルギー間のエネルギー変換に対応します.

等温非弾性近似の下での連続の式

次いで, 等温非弾性近似の下での連続の式を導くために…

$$\rho = \rho_0 + \rho', \quad \rho_0 = \rho(\varphi_0, T_0)$$

仮定2

$$|\rho' / \rho_0| \ll 1$$

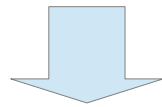
流体の密度を, このように分解します.

ここで, 流体の密度分布がほぼ静水圧下の等温分布であると仮定しますと…

$$\rho = \rho_0$$

流体の密度を, このように近似することができますので…

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$



$$\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0$$

等温非弾性近似の下での連続の式

連続の式は, このように簡単化されます.

これが等温非弾性近似の下での連続の式です.

ブシネスク近似の再現

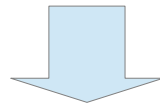
以上のようにして, 等温非弾性近似の下での運動方程式と連続の式が定式化されましたが, ここで…

流体層は浅い

$$(gH)^{1/2}/a_0 \ll 1, \quad a_0 = a(\varphi_0, T_0)$$

流体層の厚さ

音速

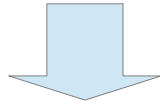


$$\rho_0 \approx \text{constant}$$

流体層は浅いものと仮定しますと…

ρ_0 を一定とみなすことができます. このとき…

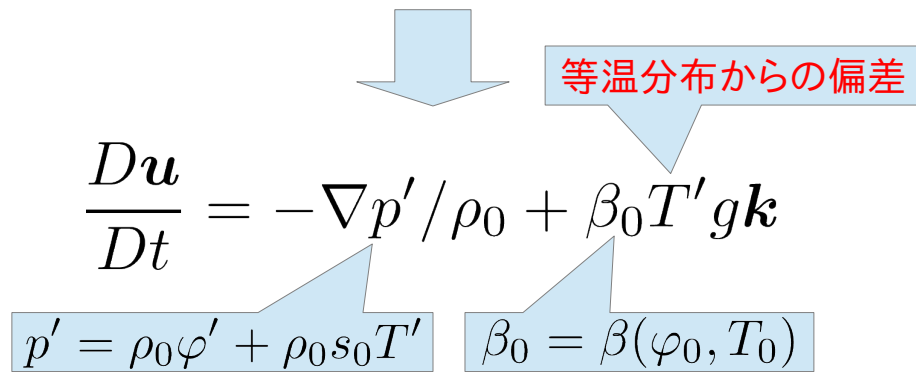
連続の式



$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$$

連続の式は, ブシネスク近似下でのそれに帰着し…

運動方程式



The diagram illustrates the derivation of the equation of motion. At the top, the title "運動方程式" (Equation of Motion) is centered. A large blue arrow points downwards from the title to the main equation. To the right of the arrow, a blue box contains the text "等温分布からの偏差" (Deviation from isotherm distribution) in red. The main equation is
$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p' / \rho_0 + \beta_0 T' g \mathbf{k}$$
. Below the equation, two blue boxes provide definitions for the variables: $p' = \rho_0 \varphi' + \rho_0 s_0 T'$ on the left and $\beta_0 = \beta(\varphi_0, T_0)$ on the right. Arrows point from these boxes to the corresponding terms in the equation.

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p' / \rho_0 + \beta_0 T' g \mathbf{k}$$

$p' = \rho_0 \varphi' + \rho_0 s_0 T'$ $\beta_0 = \beta(\varphi_0, T_0)$

運動方程式も、ブシネスク近似下での方程式に帰着することが示されます。

この方程式中の温度偏差が…

等温分布からの偏差であることに注意してください。

ブシネスク近似は
等温非弾性近似の一極限として
再現可能である

かくして, ブシネスク近似は, 等温非弾性近似の一極限として再現可能であることが示されました.

この結果を…

等温非弾性近似下で浮力のなす仕事は
非弾性近似と同様に
内部エネルギーと運動エネルギー間の
エネルギー変換に対応する

先ほど述べましたこの事実と組み合わせますと…

ブシネスク近似下で浮力のなす仕事は
内部エネルギーと運動エネルギー間の
エネルギー変換に対応する

<https://doi.org/10.5281/zenodo.4013781>

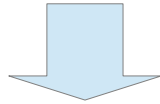
ブシネスク近似下で浮力のなす仕事もまた, 内部エネルギーと運動エネルギー間のエネルギー変換に対応するものと結論することができます.

等温非弾性近似が適用可能となる条件

最後に, 等温非弾性近似が適用可能となる条件に関連して, 少し注意を述べておきたいと思います.

この条件のうちの一つに...

$$\beta_0 T_0 \ll 1$$



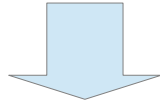
等温非弾性近似は
理想気体には適用できない

このようなものがあります。しかしながら、理想気体では、この条件が満たされることは決してありませんので…

等温非弾性近似は理想気体には適用できない、ということになります。

ブシネスク近似は
理想気体にも適用可能

<https://doi.org/10.5281/zenodo.4013785>



ブシネスク近似は等温非弾性近似に
部分的に含まれているに過ぎない

一方, ブシネスク近似は理想気体にも適用可能であることから…

ブシネスク近似は, 等温非弾性近似に, 部分的に含まれているに過ぎないことが分かります.

結論

- 等温非弾性近似という非弾性近似の亜種を構成した.
- ブシネスク近似は等温非弾性近似の一極限として再現可能であることが示された.
- 等温非弾性近似下で浮力のなす仕事は, 内部エネルギーと運動エネルギー間のエネルギー変換に対応する.
- 従って, ブシネスク近似下で浮力のなす仕事も, 内部エネルギーと運動エネルギー間のエネルギー変換に対応する.
- ただし, 等温非弾性近似が適用可能となる条件の考察からこの近似は理想気体には適用できないことが分かった.
- ブシネスク近似は理想気体にも適用可能であることから, ブシネスク近似は等温非弾性近似に, ごく部分的に含まれているに過ぎないことも明らかになった.

以上まとめますと…

このようになります。

御清聴ありがとうございました。